Phys. Lab.
Oberlin College Library,
Not to be Drawn

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 3. 1. Februar 1917. 18. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 4 am 10. Februar 1917.

INHALT:

Originalmitteilungen:

H. Schwerdt, Über graphische Darstellungen mit Kurvenscharen. S. 45.

A. March, Kinetische Theorie der Reaktionsgeschwindigkeit. S. 53.

W. Voigt, Fragen der Pyro- und Piezoelektrizität der Kristalle. III. Über die experimenteile Bestimmung der permanenten zentrisch-symmetrischen Momente. S. 59.

Berichtigung. S. 67.

Besprechungen:

W. C. Röntgens grundlegende Abhandlungen über die *X*-Strahlen. S. 68.

G. Scheffers, Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik, eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. S. 68.

W. Bahrdt, Physikalische Meßmethoden. S. 68.

Personalien. S. 68.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über graphische Darstellungen mit Kurvenscharen.

Von Hans Schwerdt.

Eine in der Praxis häufig vorkommende Aufgabe ist die graphische Darstellung des Zusammenhanges zwischen mehreren voneinander abhängigen Größen. Die Aufgabe kann erstens dann vorliegen, wenn Beobachtungsresultate, häufig gebrauchte Faktoren, Korrektionsgrößen u. Ähnl. zusammenzufassen sind, deren Abhängigkeit von anderen Größen mathematisch in Gestalt einer bekannten Gleichung oder Funktion formulierbar ist; zweitens dann, wenn Beobachtungswerte, statistische Daten u. Ähnl. unbekannter mathematischer Gesetzmäßigkeit darzustellen sind. Während sich bei der zweiten Gruppe von Aufgaben im voraus nichts darüber aussagen läßt, auf welche Art die empirischen Größen am zweckmäßigsten dargestellt werden, kann für einen großen Kreis von Aufgaben erster Art im voraus auf rechnerischem Wege eine Darstellung gefunden werden, die die Berechnung oder Konstruktion oder Benutzung der Tafel wesentlich einfach gestaltet.

Es seien zunächst zwei Größen, x und y, durch die Formel

$$F(x, y) = 0$$

miteinander verknüpft. Als Beispiel mögen die Hyperbeltafel von Pouchet und die entsprechende logarithmische Tafel von Lalanne genannt sein, die die Funktion

$$x \cdot y = p \qquad (1)$$

für variierende p innerhalb eines bestimmten Bereiches darstellen.

Wird ein rechtwinkliges, Cartesisches Koordinatensystem gewählt und werden die x-Werte als Abszissen, die y-Werte als Ordinaten eingezeichnet, so ergibt sich eine gleichseitige Hyperbel. Sie wird die Bildkurve der Rechenaufgabe $F = 0$ genannt.

Wird die Gleichung (1) logarithmiert,

$$\log x + \log y = \log p, \qquad (2)$$

und werden die Werte $(\log x)$ als Abszissen-, die Werte $(\log y)$ als Ordinatenteilungen aufgetragen, so wird offenbar die Bildkurve eine Gerade (Fig. 2). An die Achsen, die die logarithmischen Teilungen tragen, werden nicht die Funktionswerte, sondern die Argumentwerte angeschrieben. Die sich ergebende Teilung heißt Funktionsskala.

Dieses an einem Beispiel angedeutete Prinzip der Funktionsskalen (Anamorphose), das von Léon Lalanne zuerst eingeführt, von M. d'Ocagne weiter entwickelt worden ist, ist eine der wichtigsten Methoden, die bei der graphischen Darstellung Verwendung finden.

Die Rechenaufgabe $F = 0$ wird eventuell geeigneten Umformungen unterzogen, auf den Achsen des Bezugssystems werden die sich als zweckmäßig ergebenden Funktionen aufgetragen und an die Teilungen die Argumentwerte angeschrieben. Dann wird die Bildkurve eingezeichnet. Der praktische Nutzen solcher Funktionsskalen ist ersichtlich sehr groß, wenn sich als Bildkurven Gerade ergeben; denn es genügen dann zwei Punkte, um den Verlauf der gesamten Kurve einzeichnen zu können. Handelt es sich um die Zusammenfassung von Beobachtungswerten, so ist bei geradliniger Bildkurve eine genaue, von Mehmke angegebene Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadratsumme anwendbar, während bei allen anderen Kurvenzügen eine Ausgleichung nur nach Gutdünken möglich ist.

Dieses Prinzip der sog. geometrischen Anamorphose erscheint durch das angeführte Verfahren hinreichend begründet. Alle Übersicht über den mathematischen Zusammenhang geht aber sofort verloren, wenn zur allgemeinen Anamorphose in gleicher Weise übergegangen wird. Als Beispiel für die allgemeine Anamorphose kann die Darstellung über $\frac{y}{x}$ als Ordinate dienen, die für gewisse parabolische Funktionen ohne Absolutglied zweckmäßig ist, aber auch

sonst mit Erfolg angewandt wird. Ist die Funktion

$$y^l = A \cdot x^m + B x^n \; (m > n)$$

vorgelegt, so werden

$$\frac{y^l}{x^n}$$

als Ordinaten zu den Abszissen x^{m-n} aufgetragen. Das Bild der Funktion wird geradlinig. Es ist sofort ersichtlich, daß die Ordinatenachse nicht mit einer Funktionsteilung eines Argumentes versehen werden kann. Es handelt sich hierbei um eine vielgebrauchte Darstellung. So stellt

$$y = A \cdot x^4 + B x^2$$

den Zusammenhang zwischen der Frequenz x eines Wechselstromes mit der Schallintensität y eines tönenden Lichtbogens dar [1]).

Von besonderer Bedeutung ist diese Darstellung für das Problem des Oberflächenwiderstandes [2]), das im Schiffs- und Kanalbau eine hervorragende Rolle spielt [3]).

In der Beleuchtungstechnik ist eine ähnliche Darstellung benutzt worden, um die Wertigkeit der künstlichen Lichtquellen untereinander und mit dem Tageslicht zu vergleichen. Es werden die Verhältniszahlen $\frac{\text{blau}}{\text{grün}}$ als Abszissen, als Ordinaten die Zahlen $\frac{\text{rot}}{\text{grün}}$ aufgetragen [4]) (blau + grün + rot = 100).

Eine Begründung für diese allgemeine Anamorphose, der sich die geometrische offenbar einordnet, soll im folgenden durch eine andere Auffassung dargestellt werden, zu der aus der Abbildungslehre entlehnte Vorstellungen geführt haben.

Der Gedanke der Abbildung wurde zuerst von d'Ocagne in das Gebiet der Nomographie getragen. Er unterwarf seine graphischen Tafeln einer Punkttransformation [5]) (einer Abbildung, die Punkte in Punkte überführt) und zeigte, daß sie einen bestimmten analytischen Bereich innerhalb eines verlangten geometrischen Gebietes, etwa eines Rechteckes, darzustellen vermögen. Ferner fügte er seinen linearen Tafeln die dualistische Transformation der reziproken Polaren hinzu [1]) und gab auf diese Weise die strenge Begründung für die kollinearen oder fluchtrechten Tafeln.

Hier soll von der Darstellung der Funktion

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (3)$$

in allgemeiner Anamorphose durch Rechentafeln mit Kurvenkreuzung (abaques à entrecroisement) gehandelt werden.

Jede Funktion $F = 0$ ist in einem rechtwinkligen Cartesischen Koordinatensystem (x, y) als Kurvenschar nach dem Parameter $z = p$ darstellbar [2]). Es werde für jede darzustellende Funktion F eine solche Cartesische Ebene vorausgesetzt, in der die regulären Achsen (x, y) definiert seien. Dieser Ebene E werde eine Punkttransformation hinzugefügt, die sie in die Ebene E mit den regulären orthogonalen Cartesischen Achsen (ξ, η) überführt.

Die Achsenkreuze (x, y) und (ξ, η) seien äquivalent. Die Transformation

$$\begin{aligned} x &= U(\xi, \eta) \\ y &= V(\xi, \eta) \end{aligned} \qquad (4)$$

muß gewissen Bedingungen genügen, damit die Abbildung der Ebenen aufeinander näher bestimmt sei:

Es sollen U und V endlich, stetig und reell sein, wenigstens innerhalb angebbarer Bereiche in E und E. Es sei zugelassen, daß U und V endlichfach mehrdeutig sind mit folgender Einschränkung: Um jeden Punkt a soll es ein angebbares Gebiet E geben, dessen sämtliche diskrete Punkte sich wieder in diskrete Punkte abbilden (Fig. 1), d. h.: liegt c außerhalb E, so darf es stattfinden, daß die Bilder γ und α zusammenfallen. Liegt dagegen b innerhalb E, so soll das Bild β notwendig verschieden von α sein. Damit diese Beziehung zwischen E und E umkehrbar bestehe, ist die Existenz der Ungleichung notwendig und hinreichend:

---

1) v. Pirani, Graph. Darstellung in Wissenschaft und Technik § 16. Sammlung Göschen. 1914.

2) Blasius, Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure 1912, Nr. 16. Stanton, Transact. Inst. Naval Archit. 1912.

3) Gümbel, Jahresb. d. Schiffsbautech. Ges. **14**, 491, 1913.

4) Bloch, Elektrotechn. Zeitschr. 1913, S. 1306. In das Wesen der dort entwickelten Darstellung erhält man einen Einblick, wenn man sie mit dem von Jasse, E. T. Z. 1913, S. 1454 berechneten Maxwellschen Farbendreieck vergleicht, das eine Transformation in einen speziellen Fall der bekannten von Hesse in seiner 6. Vorlesung der Analyt. Geom. entwickelten homogenen Koordinaten bedeutet.

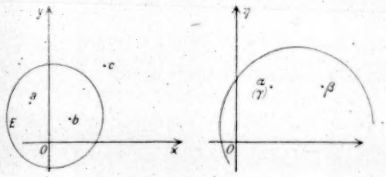
5) d'Ocagne, Traité de nomographie. Paris, 1899. Nr. 49, S. 103.

1) d' Ocagne, l. c. Nr. 56, S. 124 und Annales des Ponts et Chaussées 1884, S. 531.

2) Von dieser Anschauung ging auch Pouchet in der Arithmétique lineaire (1797) aus. Deutet man aber $F(x, y, z) = 0$ als Fläche im räumlichen Cartesischen Koordinatensystem (x, y, z), so erscheinen die Kurven $z = \text{const.}$ in der (x, y) Ebene als Orthogonalprojektionen der Niveaulinien der Fläche F auf die (x, y) Ebene. Diese Eigenschaft wird von Lalanne u. a. in den Vordergrund gestellt, die die Kurven $z = \text{const.}$ nicht als Parameterkurven, sondern als Schichtenlinien auffassen und damit den Zusammenhang der graph. Tafeln mit den geograph. Karten betonen. Lalanne erwähnt mehrmals die grundlegende Arbeit von Philippe Buache, Mém. de l'Acad. des sciences 1752. S. 415. Es erscheint jedoch vorteilhafter, diese Anschauung fallen zu lassen. Lalanne, Annales des Ponts et Chaussées 1846. I. S. 61 u. 63 ff.

$$M = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \gtrless 0 \qquad (5)$$

wie die Entwicklung mit Taylors Reihe zeigt.



a und b liegen innerhalb E, ihre Bildpunkte α und β sind notwendig verschieden. c liegt außerhalb E, sein Bild γ kann mit dem Bilde eines inneren Punktes, etwa α, zusammenfallen.

Fig. 1.

Die ersten partiellen Ableitungen seien als stetig vorausgesetzt, dann ist M als homogene bilineare Funktion dieser Ableitungen auch stetig. Die Gleichung

$$M = 0 \qquad (6)$$

definiert die Grenzkurven von E und E.

Eine einfache Betrachtung zeigt, daß bei äquivalent vorausgesetzter Orientierung der Achsenkreuze für Gebiete $M > 0$ der Drehungssinn gewahrt bleibt, während er für Gebiete $M < 0$ in den entgegengesetzten übergeführt wird. Es sei ein Flächenelement in E als Dreieck definiert.

$$2 \cdot dS = \begin{vmatrix} dx & dy \\ \delta x & \delta y \end{vmatrix}; \text{ sein Bild in E sei}$$

$$2 \cdot d\Sigma = \begin{vmatrix} d\xi & d\eta \\ \delta\xi & \delta\eta \end{vmatrix}; \text{ dann ist}$$

$$dS = M \cdot d\Sigma.$$

Also ist M die Zahlengröße, die an jeder Stelle den Flächenmaßstab von dS zu $d\Sigma$ angibt. Von der linearen Vergrößerung kann nicht gesprochen werden, da sie nicht allein eine Funktion des Ortes, sondern auch eine Funktion der Richtung ist; denn die Funktionen U und V brauchen nicht der Laplaceschen Differentialgleichung zu genügen. Das ist der wesentliche Unterschied zwischen den hier behandelten und den konformen Abbildungen. Auf den Kurven $M = 0$ muß jede Abbildung besonders untersucht werden.

Bei der geometrischen Anamorphose sind die Funktionen U und V von besonderer Art,

x ist Funktion von ξ allein,
y ist Funktion von η allein,

d. h. die Schar der y-Linien ($x = \text{const.}$) transformiert sich in die Schar der η-Linien ($\xi = \text{const.}$), die x-Linien ($y = \text{const.}$) werden in die ξ-Linien verwandelt. Die Ebene E ist also einer Deformation parallel zur x-Richtung und einer Deformation parallel zur y-Richtung unterworfen worden. Auf diese Weise sind die Koordinatenlinien in ihrer Paralleleneigenschaft invariant geblieben.

Für die Praxis ist die geometrische Anamorphose von besonderer Bedeutung, da das vorgedruckte Koordinatenpapier benutzt werden kann und nur mit Funktionsteilungen versehen zu werden braucht. Es sind deshalb auch Untersuchungen angestellt worden, welche Funktionen in geometrischer Anamorphose geradlinige Bildkurven haben können.

Die Funktionen $F(x, y; p) = 0$, deren Bilder in geometrischer Anamorphose eine Schar paralleler Geraden sein sollen, sind von de Saint-Robert[1]) behandelt worden. Ihre Differentialgleichung ist:

$$\frac{\partial^2 \log\left(\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\partial x \, \partial y} = 0.$$

Die übrigen Funktionen sind von Massau[2]) dargestellt.

Für die Praxis wird folgende Überlegung hinreichen:

Es werde der darzustellenden Funktion $F(x, y; p) = 0$ die Punkttransformation

$$\begin{aligned} \xi &= u(x) \\ \eta &= v(y) \end{aligned} \qquad (7)$$

hinzugefügt. Es wird nun eine einzelne, bestimmte Kurve $p = p_0$ betrachtet. Soll ihr Bild geradlinig sein, so muß

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = C = \text{const. sein.}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

$$dx = \frac{1}{u'} \, d\xi$$

$$dy = \frac{1}{v'} \, d\eta$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{1}{u'} \, d\xi + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{1}{v'} \, d\eta = 0$$

$$C \cdot d\xi - d\eta = 0$$

$$C \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{1}{v'} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{1}{u'} = 0 \qquad (8)$$

Handelt es sich zunächst nur darum, nicht eine Schar mit variierendem p, sondern eine einzelne Kurve ($p = \text{const.}$) darzustellen, so ist sofort er-

1) Memorie della R. Accademia di Torino, 2. Serie **25**, 53, 1871.
2) Massau, Annales de l'Assoc. des Ing. sortis des écoles spéc. de Gand, 1884. Buch III, Kap. 3, § 2.

sichtlich, daß eine solche Darstellung, vorbehaltlich einer Quadratur, stets auf beliebig viele Arten möglich ist. Es wird eine der beiden Funktionen u (oder v) willkürlich angenommen, dann ergibt sich die andere, also v (oder u), aus der letzten Gleichung[1]).

Am Beispiel der oben erwähnten Multiplikationstafeln soll gezeigt werden, wie sich durch verschiedene Wahl der Funktion u die verschiedenen gebräuchlichen Arten ergeben:

$$x \cdot y = p$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{p}{x}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{p}{y}$$

Somit ergibt sich die Gleichung (8)

$$C \cdot \frac{p}{y} \cdot \frac{1}{v'} + \frac{p}{x} \cdot \frac{1}{u'} = 0 \qquad (9)$$

I. Es wird $u' = \frac{1}{x}$ gewählt. Somit wird aus (9)

$$v' = -\frac{C}{y}. \quad \text{Hieraus folgt}$$

$$C = -1$$
$$u = \int \frac{dx}{x} \ldots\ldots \xi = \log x$$
$$v = \int \frac{dy}{y} \ldots\ldots \eta = \log y.$$

Beide Achsen tragen logarithmische Teilungen, die Bildkurven sind untereinander parallel ($C = -1$).

Dies ist Lalannes Tafel[2]) (Fig. 2).

II. Setzt man $u' = 1$, so wird aus (9)

$$v' = -C \cdot \frac{p}{y^2}. \quad \text{Hieraus folgt}$$

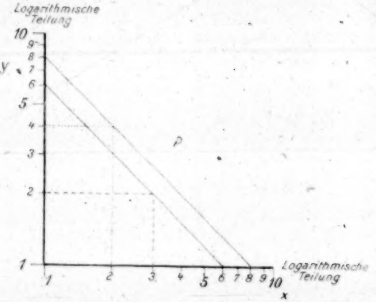
$$C = \frac{1}{p}$$
$$u = \int dx \ldots\ldots \xi = x$$
$$v = -\int \frac{dy}{y^2} \ldots\ldots \eta = \frac{1}{y}$$

Die ξ-Achse ist regulär geteilt, die η-Achse trägt die reziproke Skala[3]). Die Richtungskonstanten der Bildgeraden sind $C = \frac{1}{p}$.

1) Tritt in Gleichung (8) der Parameter p so auf, daß er durch eine geeignete Wahl von C aus der Gleichung verschwindet, so ist auch die gesamte Schar durch gerade Linien darstellbar. Dafür dürfen u' und v' den Parameter p nicht enthalten; es ist dann hinreichend, wenn $\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}$ in das Produkt zweier Funktionen $h(p) \cdot g(x, y)$ zerlegbar ist, von denen g von p unabhängig ist und h die Größen x und y nicht enthält. Dann wird $C = h(p)$ gesetzt.

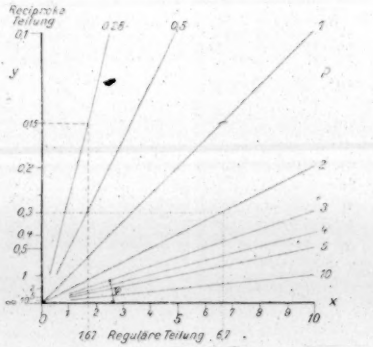
2) Annales des Ponts et Chaussées, II, 31 ff. u. 43 ff., 1846.

3) v. Pirani u. H. Miething, Zeitschrift für Feinmechanik 1915 Nr. 7.



Tafel nach Lalanne. Beispiele: $2 \cdot 4 = 8$, $3 \cdot 2 = 6$.
Fig. 2.

Dies ist die von Crépin[1]) angegebene Tafel (Fig. 3).



Tafel nach Crépin. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{p}$.
Beispiele: $1{,}67 \cdot 0{,}15 = 0.25$, $6{,}7 \cdot 0{,}3 = 2$.
Fig. 3.

III. Setzt man $u' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, so wird nach (9)

$$v' = -C\frac{\sqrt{x}}{y} = -C \cdot \frac{\sqrt{p}}{y \cdot \sqrt{y}}.$$

Hieraus folgt:

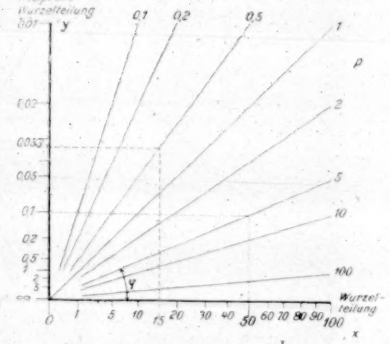
$$C = \frac{1}{\sqrt{p}}$$
$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \ldots \xi = 2 \cdot \sqrt{x}$$
$$v = -\int \frac{dy}{y \cdot \sqrt{y}} \ldots \eta = \frac{2}{\sqrt{y}}$$

Die ξ-Achse trägt eine Wurzelteilung, die η-Achse eine reziproke Wurzelteilung, die Rich-

1) Crépin, Annales des Ponts et Chaussées 1881, I, 138, Plan VI.

tungskonstanten der Geraden sind $C = \frac{1}{\sqrt{p}}$.

Dies ist eine von Fürle[1]) konstruierte Tafel (Fig. 4).



Tafel nach Fürle. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{p}}$.
Beispiele: $15 \cdot 0{,}033 = 0{,}5$, $50 \cdot 0{,}1 = 5$.
Fig. 4.

Es läßt sich die Gleichung umschreiben in

$$x \cdot q = y.$$

Dann wird nach Gleichung (8)

$$-C \cdot \frac{1}{v'} + q \cdot \frac{1}{u'} = 0. \qquad (10)$$

IV. Setzt man

$u' = 1$, so wird nach (10)

$v' = \frac{C}{q}$. Hieraus folgt

$C = q$

$u = x \ldots\ldots\ldots \xi = x$

$v = y \ldots\ldots\ldots \eta = y.$

Dies ist die von Chenevier[2]) benutzte Tafel (Fig. 5). Sie findet ausgedehnte Anwendung z. B. in der Kartographie bei Bestimmung von geographischer Breite und Uhrstand nach der Standlinienmethode. Gewisse Rechenkoeffizienten sind abhängig von Stundenwinkel und Breite[3]).

V. Wird in (10)

$u' = \frac{1}{x^2}$ gesetzt, so wird aus (10)

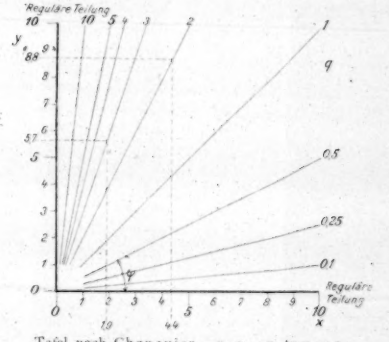
$v' = -\frac{C \cdot q}{y^2}$. Hieraus folgt

$C = \frac{1}{q}$

$u = -\int \frac{dx}{x^2} \ldots\ldots\ldots \xi = \frac{1}{x}$

$v = -\int \frac{dy}{y^2} \ldots\ldots\ldots \eta = \frac{1}{y}.$

Dies ist eine von Fürle[1]) angegebene Tafel.



Tafel nach Chenevier. $x \cdot q = y$, $\operatorname{tg}\varphi = q$.
Beispiele: $1{,}9 \cdot 3 = 5{,}7$, $4{,}4 \cdot 2 = 8{,}8$.
Fig. 5.

Zwischen diesen verschiedenen Arten von Multiplikationstafeln ist ein Zusammenhang hergestellt, der auf Grund der Gleichung (9) (bzw. (10)) durch die Wahl einer einzigen Funktion, nämlich u', vermittelt wird.

	u'	C	ξ	η		Fig.
(9)	$\frac{1}{x}$	-1	$\log x$	$\log y$	Lalanne	2
(9)	1	$\frac{1}{p}$	x	$\frac{1}{y}$	Crépin	3
(9)	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$2\sqrt{x}$	$\frac{2}{\sqrt{y}}$	Fürle	4
(10)	1	q	x	y	Chenevier	5
(10)	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{q}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	Fürle	—

In den Fig. 2—5 sind nur einige Geraden aus jeder Schar gezeichnet.

Der Vorteil, den eine Tafel vor einer anderen voraus hat, ist sowohl in der Genauigkeit zu sehen, mit der sie einen bestimmten Bereich darstellt, als auch in der Ausdehnung der Bereiche für x, y und p, die in den verschiedenen Tafeln verschieden ist.

Durch andere Wahl von u' ließen sich noch beliebig viele andere Tafeln herstellen, deren Besonderheit eben in den Bereichen für x und y bestehen würde.

Handelt es sich bei der geometrischen Anamorphose um Abbildungen mit Parallelenin-

1) Fürle, Rechenblätter. Progr. d. 9. Realschule zu Berlin. O. 1902, S. 16, Tafel 2, 11.
2) d'Ocagne, l. c. S. 42.
3) Hugershoff, Kartograph. Aufnahmen 1912 (Göschen) S. 148, Fig. 65.

1) Fürle, l. c. Tafel 2, 16, S. 16.

varianz, so wird auf diese bei der allgemeinen Anamorphose auch noch verzichtet.

Die Linien $x = \text{const.}$ und $y = \text{const.}$ werden in andere Kurven transformiert. Zunächst werden in der Praxis wieder Gerade bevorzugt. Die theoretische Begründung für diese allgemeinen geradlinigen Tafeln hat Duporcq[1]) gegeben, indem er gewisse Funktionsgleichungen bestimmte, die die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür enthalten, daß eine Funktion F in allgemeiner Anamorphose durch drei Geradenscharen darstellbar ist.

Die vorhergehenden Ausführungen sollen auf das spezielle Beispiel der Schar der Wurfparabeln

$$y = x \cdot \operatorname{tg}\varphi - \frac{x^2}{a \cdot \cos^2\varphi} \qquad (10)$$

angewandt werden. Hierin ist

$$a = \frac{2v}{g},$$

wenn

$$g = 9{,}81 \text{ cm/sec}^{-2}$$

und v die Anfangsgeschwindigkeit des geworfenen Körpers bedeuten.

Nach dem oben angegebenen Verfahren ergibt sich

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi - x \cdot \frac{1}{a \cdot \cos^2\varphi}$$
$$\xi = x$$
$$\eta = \frac{y}{x} \quad \ldots\ldots \quad y = \xi \cdot \eta.$$

Trotz des Vorzuges, die Parabelschar in eine Schar gerader Linien zu verwandeln, weist diese Tafel erhebliche Mängel auf.

Eine kurze Rechnung zeigt, daß die Geraden ein System 2. Grades bilden, das von einer Hyperbel umhüllt wird. Nach bekannten Sätzen der projektiven Geometrie wird zwar dadurch auf einer beliebigen, der Schar angehörigen Geraden, die zu einem Teilungsträger gewählt wird, durch die übrigen Geraden der Schar eine reguläre Teilung[2]) ausgeschnitten, so daß die Konstruktion erleichtert wird; aber durch die zweifache Überdeckung der Ebene mit Geraden wird der Benutzer der Tafel vollständig von der Vorstellung des zugrunde liegenden physikalischen Vorganges entfernt. Sodann ist sofort ersichtlich, daß wegen der Singularität der Geraden $x = 0$ der freie Fall in der Tafel nicht enthalten ist und gerade der Anfangspunkt und seine nähere Umgebung unsicher dargestellt werden. Schließlich muß das Blatt noch mit einer Schar gleichseitiger Hyperbeln

$$\xi \cdot \eta = y$$

überzogen werden, damit die y-Werte an einer Skala ablesbar sein können; oder es müßte jede Ablesung an der η-Achse eine Umrechnung mit Hilfe des Rechenschiebers erfahren.

Eine andere Darstellung, die den physikalischen Zusammenhang zwischen den einzelnen Bildkurven nicht verschleiert, dabei die Parabelschar auch in eine Geradenschar überführt und nur Gerade und Kreise zur Konstruktion benötigt, wird durch folgende Abbildung hergestellt

$$x = \xi$$
$$y = -\frac{1}{a}\xi^2 - \frac{1}{a}\eta^2 + \eta \qquad (11)$$

In den Figuren ist $a = 1$ angenommen.

Zu jedem Punkt der Ebene E gehört ein und nur ein Punkt der Ebene E. Zu einem Punkte von E gehören stets 2 Punkte von E, die entweder reell verschieden oder zusammenfallend oder konjugiert komplex sein können.

$$M = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \ldots\ldots & 1 - \frac{2}{a}\eta \end{vmatrix}$$

$$M = 1 - \frac{2}{a} \cdot \eta \cdot \qquad (12)$$

Für alle Werte $\eta \neq \frac{a}{2}$ ist $M \neq 0$, die Abbildung also nach (5) brauchbar.

Es zeigt sich sofort, daß

1. die y-Linien ($x = \text{const.}$) invariant bleiben,
2. die x-Linien ($y = \text{const.}$) sich in die Schar konzentrischer Kreise

$$\xi^2 + \eta^2 - a\eta + y = 0 \qquad (13)$$

transformieren, deren Mittelpunkt

$$\left(0, \frac{a}{2}\right)$$

und deren Radien

$$\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4ay} \qquad (14)$$

sind.

Die Umhüllende der Schar (10) ist die Parabel

$$ay = \frac{a^2}{4} - x^2. \qquad (15)$$

Eine einfache Substitution zeigt, daß auf dieser Umhüllungskurve $M = 0$ ist. Das Bild der Umhüllenden ist die Gerade

$$\eta = \frac{a}{2}.$$

Bezeichnet man denjenigen Teil der Ebene E, der den Nullpunkt enthält, als das Innere

1) Bulletin des sciences mathématiques, 1898, I. 287.
2) Schilling, Über die Nomographie von M. d'Ocagne. Leipzig 1900, S. 20, § 3.

der Parabel (15), so zeigt sich, daß nur solche Punkte abbildbar sind, die innerhalb oder auf der Parabel (15) liegen. Nur das Innere der Parabel genügt den oben über E gemachten Voraussetzungen. Es wird auf die gesamte E-Ebene abgebildet. Und zwar ist unterhalb der Geraden

$$M = 0 \left(\eta < \frac{\alpha}{2} \right)$$

die Funktionaldeterminante $M > 0$, oberhalb der Geraden

$$M = 0 \left(\eta > \frac{\alpha}{2} \right)$$

ist $M < 0$. Es zeigt sich, daß von jedem inneren Punkt zwei in bezug auf die Geraden $M = 0$ symmetrische Bilder entstehen, und zwar ist unterhalb $M = 0$ der Drehungssinn gewahrt, während er oberhalb $M = 0$ in den entgegengesetzten übergeführt wird. In den Figuren sind stets die linken Halbebenen unterdrückt worden, die ja in bezug auf $x = 0$ symmetrisch sind. Der Nullpunkt bildet sich ab in die Punkte $(0, 0)$ und $(0, \alpha)$. Die Parabelschar (10) hat als Bild je eine Geradenschar durch den Punkt $(0, 0)$ und $(0, \alpha)$. Beide Scharen sind in bezug auf $M = 0$ symmetrisch. Die mit demselben Parameterwerte φ bezeichneten Geraden schneiden sich auf der Geraden $M = 0$.

Es ist für die Einfachheit der Konstruktion und die Übersicht über die Tafel wesentlich, daß die Neigungswinkel der Geraden gegen die ξ-Achse gleich den dazu gehörigen Elevationswinkeln φ sind, d. h. gleich den Winkeln, die die Nullpunktstangenten der entsprechenden Parabeln mit der X-Achse bilden.

Will man den Einblick in den physikalischen Zusammenhang betonen, so werden die Teile

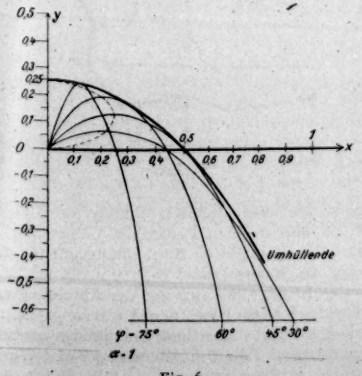


Fig. 6.

oberhalb $M = 0$ unterdrückt, wie es in Fig. 7 geschehen ist.

Man kann sich vorstellen, daß die in Fig. 6 dargestellte Ebene E nach oben zu deformiert worden ist, bis die Umhüllungsparabel in die Gerade $M = 0$ überging. Dabei wurden die Flächenelemente, die in weiterer Entfernung vom Nullpunkt lagen, näher an ihn herangerückt, wie sich auch aus den Teilungen in den Fig. 7 und 9 ergibt.

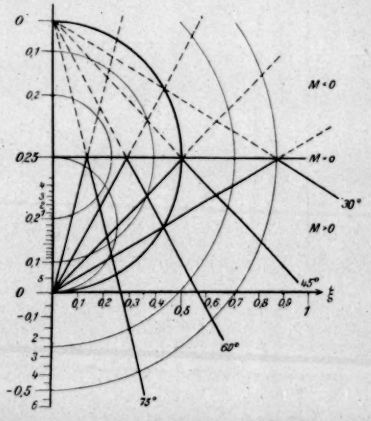


Fig. 7.

Bei einer Rechentafel zum praktischen Gebrauch wird man zwischen den Gebieten $M > 0$ und $M < 0$ dagegen keinen Unterschied machen, sondern alle von dem oberen Bildpunkt des Nullpunktes ausgehenden Strahlen unterdrücken, so daß sich Fig. 12 ergibt. Die in Fig. 6 angedeutete Scheitelellipse bildet sich in den in Fig. 7 eingezeichneten Halbkreis mit dem Halbmesser 0,25 ab. Dieser Halbkreis ermöglicht eine genaue Ablesung an den Stellen, bei denen die Geraden die Kreise berühren.

Mehr von theoretischem Interesse als von praktischen Nutzen ist die in den Fig. 8 und 9 dargestellte Kreisschar. Die Kreisschar (Fig. 8)

$$x^2 + y^2 + y \frac{2\varrho^2}{\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha^2} \varrho^4 - \varrho^2 \right) = 0 \qquad (16)$$

hat als Umhüllende dieselbe Parabel (15), wie die Schar der Wurfparabeln:

$$\alpha y = \frac{\alpha^2}{4} - x^2$$

Das Bild der Schar (16) ist

$$\xi^2 + \eta^2 = \varrho^2. \qquad (17)$$

Ein Kreis der Schar (16) hat die Mittelpunktskoordinaten

$$\left(0, -\frac{\varrho^2}{a}\right)$$

und den Radius ϱ; sein Bild ist wieder ein

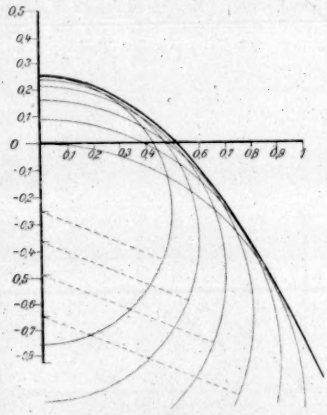


Fig. 8.

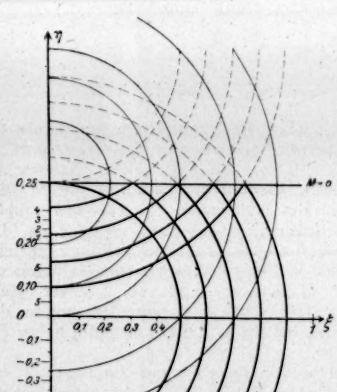


Fig. 9.

Kreis mit gleichem Radius, dessen Mittelpunkt im Nullpunkt liegt. Die Kreise bleiben bei der Abbildung in bezug auf ihre Größe invariant.

Die Zweideutigkeit der Abbildung soll noch auf folgende Weise erörtert werden:

Bewegt man sich auf irgendeiner der Parabeln (10) vom Anfangspunkt o aus, so heißen alle Punkte, die vor der Berührung mit der Umhüllenden liegen, frühere Punkte, alle Punkte, die hinter der Berührung mit der Umhüllenden liegen spätere Punkte. Jeder Punkt der Ebene E kann als Schnittpunkt zweier Parabeln (10) aufgefaßt werden, und zwar er-

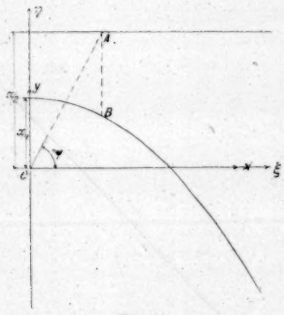


Fig. 10.

scheint er als früherer Punkt der einen und als späterer Punkt der anderen. (Z. B. ist der Punkt (0,43; 0) in Fig. 6 früherer Punkt der Parabel $\varphi = 30^0$ und späterer Punkt der Parabel $\varphi = 60^0$.)

Die Ebene E ist also als doppelt belegt anzusehen, und es ist leicht zu erkennen, daß die Abbildung die beiden Belegungen trennt,

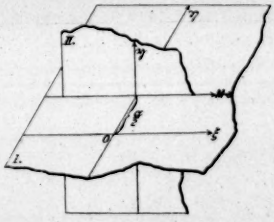


Fig. 11.

indem sie alle früheren Punkte im Gebiet $M > 0$, alle späteren Punkte im Gebiet $M < 0$ darstellt. Eine gleiche Betrachtung gilt für die Schar der Kreise (16).

Fig. 10 zeigt eine sich aus der Abbildung ergebende Konstruktion der Berührungspunkte zwischen Parabelschar und Umhüllungsparabel, wenn entweder die Umhüllende oder eine Wurfparabel gegeben ist.

Durch die Gleichungen (11) werden noch verschiedene interessante, für die Praxis aber weniger wichtige Beziehungen zwischen den Ebenen bewirkt, die hier keine Erwähnung finden sollen. Eine Erweiterung, die unter Umständen von Nutzen sein kann, möge nur kurz angedeutet werden:

Alle Punkte der (x, y) Ebene, die außerhalb der Parabel (15) liegen, bilden sich in imaginäre Punkte ab, die aber alle von der Form sind:

$$\xi = \text{reell}$$
$$\eta = \frac{\alpha}{2} \pm i\mathfrak{y},$$

worin $\mathfrak{y}$ eine reelle Strecke bedeutet. Die imaginären Bilder kann man in einer reellen (ξ, η)-

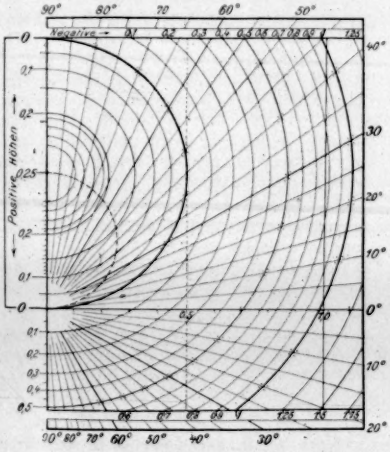


Fig. 12.

Ebene (II-Ebene) deuten, die die (ξ, η)-Ebene (I-Ebene) (unter beliebigem Winkel) in der Geraden $M = 0$ schneidet, wie es Fig. 11 zeigt. Soll jetzt eine Abbildung der gesamten (x, y)-Ebene auf die E-Ebene hergestellt werden, so genügt es, von der (ξ, η)-Ebene nur den Teil $M > 0$ zu betrachten und die II-Ebene umzulegen, bis sie mit der I-Ebene sich deckt. Die in Fig. 7 gezeichneten Kreise setzen sich dann oberhalb $M = 0$ in Hyperbeln fort.

Zusammenfassung.

Nach einleitenden Sätzen über die graphische Darstellung wird eine neue Methode zur Herstellung von Rechentafeln angegeben. Jede darzustellende Beziehung $F(x, y, p) = 0$ wird im rechtwinkligen Cartesischen Koordinatensystem (x, y) als Kurvenschar in bezug auf den Parameter p gedeutet. Diese (x, y)-Ebene wird auf eine (ξ, η)-Ebene abgebildet. Für den Fall der geometrischen Anamorphose ergibt sich dabei der wesentliche Vorteil, daß die Darstellung an die Wahl einer einzigen Funktion (u') geknüpft ist. Dies wird an den Beispielen der gebräuchlichen Multiplikationstafeln gezeigt. Die allgemeine Anamorphose wird durch eine neue Tafel der Wurfparabeln erläutert.

(Eingegangen 25. Dezember 1916.)

Kinetische Theorie der Reaktionsgeschwindigkeit.

Von A. March.

1.

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit chemischer Reaktionen sind rein thermodynamische Überlegungen nicht ausreichend, da die Zeit in die Gleichungen der Thermodynamik nicht eingeht und außerdem die Geschwindigkeit nicht bloß von der Natur der sich umsetzenden Körper, sondern auch noch von gewissen Reibungswiderständen abhängt, die der Thermodynamik nicht erfaßbar sind. Eine Theorie der Reaktionsgeschwindigkeit ist also auf die Methoden der kinetischen Gastheorie angewiesen und hat die Thermodynamik nur dahin zu berücksichtigen, daß die für die beiden Geschwindigkeiten einer Reaktion gefundenen Temperaturfunktionen an der Gleichung der Reaktionsisochore nachzuprüfen sind. Geht nämlich die Reaktion nach dem Schema vor sich

$$\nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 + \ldots \rightarrow \nu_1' A_1' + \nu_2' A_2' + \ldots \quad (1)$$

d. h. setzen sich ν_1 Moleküle des Stoffes A_1 usw. um in ν_1' Moleküle des Stoffes A_1' usw., so ist die Geschwindigkeit des Vorganges in der Richtung nach rechts gegeben durch

$$-\frac{dc_1}{dt} = k c_1^{\nu_1} c_2^{\nu_2} \ldots - k' c_1'^{\nu_1'} c_2'^{\nu_2'} \ldots \quad (2)$$

und nach der Gleichung der Reaktionsisochore besteht zwischen den beiden Geschwindigkeitskoeffizienten k und k' die Beziehung

$$\frac{d \lg k}{dT} - \frac{d \lg k'}{dT} = \frac{q}{RT^2} \ldots \quad (3)$$

wobei q die Wärmetönung und R die Gaskonstante bedeutet. Dieser Beziehung müssen die von der Theorie gefundenen Ausdrücke für k und k' genügen.

Wir beschränken uns auf gasförmige Systeme

und betrachten im folgenden stets den einfachen Fall unimolekularer Reaktionen, bei denen nur eine einzige Molekülart eine Konzentrationsänderung erfährt. Um an ein besonders einfaches Beispiel anzuknüpfen, denken wir uns den Fall eines dissoziablen Gases, das plötzlich aus einem Zustand sehr großen in einen solchen sehr kleinen Druckes versetzt wird. Im ersten Zustand soll der Druck so groß sein, daß das Gas nahezu undissoziiert ist, im zweiten so klein, daß fast vollkommene Dissoziation eintritt. Ist die Zahl der Dissoziationsprodukte gleich zwei, so geht die Reaktion nach der Gleichung vor sich

$$A \rightarrow A_1 + A_2 . \qquad (1')$$

Bedeutet c die Konzentration von A, c' die von A_1 und A_2, so ist

$$-\frac{dc}{dt} = kc - k'c'^2 . \qquad (2')$$

Ersetzen wir die Konzentration c durch die Zahl der Moleküle im cm³ und bezeichnen diese Zahl mit n und n', so wird

$$-\frac{dn}{dt} = kn - k'n'^2 , \qquad (2'')$$

kn ist die Zahl der Moleküle A, die im cm³ in der Zeiteinheit durch Dissoziation verschwinden, $k'n'^2$ die der Molekülpaare A_1 und A_2, die sich in der Sekunde wieder zu einem Molekül A zusammenschließen. Diese beiden Ausdrücke sind zu bestimmen. Dabei möge vorausgesetzt sein, daß der Zerfall der Moleküle lediglich durch die Wärmebewegung verursacht sei und daß beschleunigende Fremdkörper (Katalysatoren) nicht vorhanden sind.

Der Zustand eines Moleküls A sei bestimmt durch μ generalisierte, voneinander unabhängige Koordinaten und Momente $p_1\, p_2 \ldots p_\mu\, q_1\, q_2 \ldots q_\mu$. Mit V bezeichnen wir die Kraftfunktion der intramolekularen Kräfte, von denen angenommen sei, daß sie lineare Funktionen der $p_1 \ldots p_\mu$ sind; die Koordinaten können dann immer so gewählt werden, daß V eine homogene quadratische Funktion derselben wird, von der Form:

$$V = {}^1/_2 (a_1 p_1^2 + \ldots + a_\mu p_\mu^2) . \qquad (4)$$

Das undissoziierte Molekül kann nicht alle möglichen Zustände $p_1 \ldots q_\mu$ annehmen, da sonst Dissoziation niemals eintreten könnte. Gewisse Wertekombinationen der $p_1 \ldots q_\mu$ entsprechen also dem in seine Teile zerfallenen Molekül und der ganze 2μ dimensionale Zustandsraum zerfällt demnach in zwei Gebiete, von welchen der eine alle undissoziierten, der andere alle dissoziierten Zustände umfaßt, so daß immer Dissoziation eintritt, wenn der Zustandspunkt eines Moleküls aus dem ersten in das zweite Gebiet übertritt.

Es kommt jetzt darauf an, durch Zuhilfenahme gewisser Hypothesen die Trennungsfläche dieser beiden Gebiete zu bestimmen. Die Überlegungen nun, die zur Aufstellung einer solchen Hypothese führen, können kaum von einer andern Annahme ausgehen als der, daß die inneren Kräfte, durch welche die Atome des Moleküls zusammengehalten werden, nur auf gewisse Entfernungen reichen und plötzlich auf Null sinken, sobald diese Entfernungen überschritten werden. Ein Molekül z. B., das aus zwei Atomen zusammengesetzt ist, soll nur solange zusammenhalten, als die beiden Atome sich nicht über einen gewissen kritischen Abstand hinaus voneinander entfernen. Von den 6 Koordinaten des Moleküls sollen also 5 alle möglichen Werte annehmen können, während die sechste einen bestimmten Maximalwert nicht überschreiten darf. Die Verallgemeinerung dieses Falles führt zur Vorstellung, daß es beim Zerfall eines Moleküls auf gewisse Koordinaten ankommt, die der Kürze halber als „Bindungskoordinaten" bezeichnet seien und daß Dissoziation immer dann eintritt, wenn die Bindungskoordinaten p_i, $p_k \ldots$ gewisse kritische Werte $\bar{p}_i$, $\bar{p}_k \ldots$ überschreiten. Diese Hypothese soll den folgenden Berechnungen zugrunde gelegt werden.

Die vorhin erwähnte Trennungsfläche des Zustandsraumes ist also gegeben durch die Gleichungen $p_i = \bar{p}_i$, $p_k = \bar{p}_k \ldots$ Bei der absoluten Temperatur T entfällt auf jede Koordinate eine gewisse potentielle Energie im Durchschnittsbetrag von ${}^1/_2 a_i p_i^2 = {}^1/_2 kT$, so daß der Durchschnittswert einer Koordinate $\sqrt{\frac{kT}{a_i}}$ ist. Doch werden sich immer Moleküle finden, deren Bindungskoordinaten ihre Mittelwerte weit übersteigen und nahe den Grenzwerten $\bar{p}_i$, $\bar{p}_k$ usw. sind. Diese Moleküle, die wir die „gefährdeten" Moleküle nennen wollen, werden gesprengt werden, wenn die potentielle Energie ihrer Koordinaten noch um ein weniges gesteigert wird. Da mit zunehmender Temperatur die Moleküle immer näher an die kritische Grenzfläche gedrückt werden, so wird die Zahl der in der Zeiteinheit zerfallenden Moleküle rasch zunehmen.

2.

Berechnen wir jetzt unter den gemachten Voraussetzungen die Zahl der in der Sekunde im cm³ dissoziierten Moleküle A. Der auf einen Freiheitsgrad eines Moleküls entfallende Betrag an potentieller Energie ist nicht konstant, sondern fortwährenden Schwankungen unterworfen,

so daß er bald ober- bald unterhalb des der Temperatur entsprechenden Mittelwertes liegt. Den Durchschnittswert aus den absoluten Beträgen dieser Schwankungen, denen die Energie eines Freiheitsgrades im Zeitelement dt unterliegt, bezeichnen wir mit $\overline{dE}$. Beschränken wir uns vorerst auf den Fall einer einzigen Bindungskoordinate, der wir den Index 1 geben, so können in der Zeit dt nur jene Moleküle sich dissoziieren, deren Energiebetrag $^1/_2 a_1 p_1^2$ zu Beginn des Zeitelements zwischen $\varepsilon = {}^1/_2 a_1 \overline{p_1}^2$ und $\varepsilon - \overline{dE}$ liegt; da die Schwankung ebensogut positiv wie negativ sein kann, wird die Hälfte dieser Moleküle zerstört werden.

Die Anzahl der Moleküle im cm³, deren Koordinaten und Momente zwischen den Grenzen p_1 und $p_1 + dp_1$, ... q_μ und $q_\mu + dq_\mu$ liegen, ist

$$A\, e^{-\frac{E}{kT}} dp_1 \,..\, dp_\mu\, dq_1 \,...\, dq_\mu, \qquad (5)$$

wobei E die gesamte Energie des Moleküls bezeichnet. Um die Zahl der gefährdeten Moleküle zu bestimmen, hat man diesen Ausdruck über alle möglichen Werte der $p_2 \,..\, p_\mu q_1 \,..\, q_\mu$ zu integrieren, das Integrationsgebiet von p_1 aber so zu wählen, daß $^1/_2 a_1 p_1^2$ zwischen $\varepsilon - \overline{dE}$ und ε liegt. Bezeichnen wir $^1/_2 a_1 p_1^2$ mit V_1, so ist

$$a_1 p_1\, dp_1 = dV_1,$$

also

$$dp_1 = \frac{dV_1}{a_1 p_1} = \frac{\overline{dE}}{a_1 \overline{p_1}};$$

die Zahl dn der dissoziierten Moleküle wird also

$$dn = \frac{A}{2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \frac{dE}{a_1 \overline{p_1}} \int e^{-\frac{E'}{kT}} dp_2 \,..\, dp_\mu dq_1 \,...\, dq_\mu. \qquad (6)$$

Dabei ist in E' von der Gesamtenergie die potentielle Energie des ersten Einheitsgrades abgezogen.

Die Gesamtzahl n der Moleküle im cm³ ist

$$n = A \int_{-\overline{p_1}}^{+\overline{p_1}} e^{-\frac{a_1 p_1^2}{2kT}} dp_1 \int e^{-\frac{E'}{kT}} dp_2 \,..\, dp_\mu dq_1 \,...\, dq_\mu \qquad (7)$$

Somit wird

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dt} = k = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \cdot \frac{dE}{dt}}{2 a_1 \overline{p_1} \int_{-\overline{p_1}}^{+\overline{p_1}} e^{-\frac{a_1 p_1^2}{2kT}} dp_1}. \qquad 1)$$

Im Nennerintegral benutzen wir

$$\sqrt{\frac{a_1}{2}}\, p_1$$

als Variable und bedenken, daß $^1/_2 a_1 \overline{p_1}^2 = \varepsilon$ einen sehr großen Wert hat, so daß

$$\int_{-\overline{p_1}\sqrt{\frac{a_1}{2}}}^{+\overline{p_1}\sqrt{\frac{a_1}{2}}} e^{-\frac{a_1 p_1^2}{2kT}} \sqrt{\frac{a_1}{2}}\, dp_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{kT}} dx = \sqrt{\pi k T}.$$

Es wird also

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dt} = k = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \cdot \frac{dE}{dt}}{2\sqrt{2 a_1 p_1}\sqrt{\pi k T}} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \cdot \frac{dE}{dt}}{4\sqrt{\varepsilon \pi k}}\, T^{-1/2}$$

wegen (8)

$$\overline{p_1} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{a_1}}.$$

Es ist noch der Geschwindigkeitskoeffizient k' der entgegengesetzten Reaktion zu bestimmen. Von den Molekülen A_1 und A_2 ist die Anzahl derjenigen Paare zu berechnen, die sich innerhalb dt zu einem Molekül A vereinigen. Die Anzahl dieser Paare bezeichnen wir mit dn', während n' die Gesamtzahl der überhaupt im cm³ vorhandenen Paare bedeuten soll. Wir fassen jedes der Moleküle A_1 mit jedem der Moleküle A_2 zusammen und erhalten n'^2 Paare. Jedes dieser Paare kann aufgefaßt werden als ein Molekül A, dessen Bindungskoordinate $p_1 > \overline{p_1}$, so daß nach Voraussetzung die chemische Anziehungskraft nur mehr sehr kleine Werte hat. Die potentielle Energie des ersten Freiheitsgrades ändert sich also für $p_1 > \overline{p_1}$ nur mehr wenig und kann für alle Werte von p_1 gleich ε gesetzt werden. Mit $d\overline{p_1}$ bezeichnen wir die durchschnittliche absolute Änderung von p_1 im Zeitelement dt; da die Anziehungskraft noch immer eine lineare Funktion von p_1 sein soll, ist dp_1 proportional $\overline{dE}$, also

$$d\overline{p_1} = \beta \cdot \overline{dE}.$$

In der Zeit dt werden sich nun die Hälfte jener Molekülpaare (A_1, A_2) vereinigen, deren Bindungskoordinate zwischen $\overline{p_1}$ und $\overline{p_1} + d\overline{p_1}$ liegt. Das sind

$$dn' = {}^1/_2 A' e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \cdot d\overline{p_1} \int e^{-\frac{E'}{kT}} dp_2 \,..\, dp_\mu dq_1 \,..\, dq_\mu. \qquad (9)$$

Die Anzahl der gesamten Molekülpaare ist

$$n'^2 = A' \int_{\overline{p_1}}^{p_1^{\max}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} dp_1 \int e^{-\frac{E'}{kT}} dp_2 \,..\, dp_\mu dq_1 \,..\, dq_\mu, \qquad (10)$$

wenn mit $p_1^{\max}$ der größte innerhalb des ge-

1) Der Buchstabe k bedeutet das eine Mal den Geschwindigkeitskoeffizienten, das andere Mal die Boltzmannsche Konstante.

gebenen Raumes erreichbare Wert von p_1 bezeichnet wird. Es wird also

$$\frac{dn'}{n'^2 dt} = k' = {}^1/_2 \frac{\dfrac{dp_1}{dt}_{\max}}{\displaystyle\int_{\bar{p}_1} dp_1} = \frac{dE}{dt} \cdot \text{const.} \qquad (11)$$

3.

Die gefundenen Ausdrücke sind jetzt an der Gleichung der Reaktionsisochore auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Es muß werden

$$\frac{d \lg \frac{k}{k'}}{dT} = \frac{q}{RT^2}$$

wobei q die Wärmetönung der Dissoziation bezogen auf ein Grammolekül bedeutet.

Beim absoluten Nullpunkt ist ε die Arbeit, die bei der Dissoziation gegen die chemische Anziehungskraft geleistet werden muß. Der Wärmeinhalt des undissoziierten und des dissoziierten Moleküls A bei der absoluten Temperatur T ergibt sich aus der Überlegung, daß beim Zerfall des Moleküls die Anzahl der Freiheitsgrade zwar nicht geändert wird, daß aber im dissoziierten Molekül auf den ersten Freiheitsgrad keine potentielle Energie entfällt. Der Energieinhalt von A_1 und A_2 zusammen ist also um ${}^1/_2 kT$ kleiner als der von A. Das aus zwei gegeneinander beweglichen Atomen zusammengesetzte Molekül z. B. hat einen Wärmeinhalt von ${}^7/_2 kT$; ${}^3/_2 kT$ entfallen auf die kinetische Energie des Schwerpunktes, ${}^2/_2 kT$ auf die Bewegung der Achse und weitere ${}^2/_2 kT$ auf die kinetische und potentielle Energie des Atomabstandes. Im dissoziierten Zustand aber ist der Wärmeinhalt nurmehr ${}^6/_2 kT$. Bezeichnen W und W' den Wärmeinhalt von A und $A_1 + A_2$, so ist

$$\frac{q}{N} = -W + \varepsilon + W' \qquad (12)$$

$$W = W' + {}^1/_2 kT \quad \text{und wegen}$$

$$\frac{q}{N} = \varepsilon - {}^1/_2 kT$$

oder

$$q = N\varepsilon - {}^1/_2 RT. \qquad (13)$$

Es muß also werden

$$\frac{d \lg \frac{k}{k'}}{dT} = \frac{N\varepsilon - {}^1/_2 RT}{RT^2}.$$

In der Tat ist nach (8) und (11)

$$\frac{k}{k'} = e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} T^{-{}^1/_2} \cdot \text{const}$$

also

$$\lg \frac{k}{k'} = e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} - {}^1/_2 \lg T + \lg \text{const}$$

und

$$\frac{d \lg \frac{k}{k'}}{dt} = \frac{\varepsilon}{kT^2} - \frac{1}{2T} = \frac{N\varepsilon - {}^1/_2 RT}{RT^2}.$$

Es ist unschwer die Rechnung für den Fall zweier oder mehrerer Bindungen zu verallgemeinern. Ist die Zahl der Bindungen gleich zwei, so müssen im Augenblick der Dissoziation entweder gleichzeitig $p_1 = \bar{p}_1$ und $p_2 = \bar{p}_2$ sein, oder $p_1 = \bar{p}$ und $p_2 > \bar{p}_2$ oder $p_1 > \bar{p}_1$ und $p_2 = \bar{p}_2$. Die Anzahl der Dissoziationen der ersten Art während des Zeitelements dt ist unendlich klein von zweiter Ordnung, die der übrigen aber beträgt

$$dn = \frac{A}{2} e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}} \frac{dE}{c_1 \bar{p}_1} \int_{\bar{p}_2}^{p_2 \max} e^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}} dp_2 \int e^{-\frac{E''}{kT}} dp_3 \ldots$$

$$dp_\mu dq_1 \ldots dq_\mu + \frac{A}{2} e^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}} \frac{dE}{c_2 \bar{p}_2} \int_{\bar{p}_1}^{p_1 \max} e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}}$$

$$dp_1 \int e^{-\frac{E''}{kT}} dp_3 \ldots dp_\mu dq_1 \ldots dq_\mu.$$

In E'' ist von der Gesamtenergie die potentielle Energie der beiden ersten Freiheitsgrade abgezogen. Führen wir die Abkürzungen ein:

$$\int_{\bar{p}_1}^{p_1 \max} dp_1 = c_1$$

und

$$\int_{\bar{p}_2}^{p_2 \max} dp_2 = c_2,$$

so wird

$$dn = \frac{A}{2} e^{-\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{kT}} dE \cdot \left(\frac{c_2}{c_1 \bar{p}_1} + \frac{c_1}{c_2 \bar{p}_2} \right)$$

$$\int e^{-\frac{E''}{kT}} dp_3 \ldots dp_\mu dq_1 \ldots dq_\mu. \qquad (14)$$

Für die undissoziierten Moleküle ist entweder gleichzeitig $p_1 < \bar{p}_1$ und $p_2 < \bar{p}_2$ oder es ist nur eine der beiden Koordinaten kleiner als der kritische Wert. Die Gesamtzahl der undissoziierten Moleküle setzt sich also aus drei Teilen zusammen und beträgt

$$n = A \Big\{ \int_{-\bar{p}_1}^{+\bar{p}_1} e^{-\frac{a_1 p_1^2}{2kT}} dp_1 \cdot \int_{-\bar{p}_2}^{+\bar{p}_2} e^{-\frac{a_2 p_2^2}{2kT}} dp_2 +$$

$$\int_{-\bar{p}_1}^{+\bar{p}_1} e^{-\frac{a_1 p_1^2}{2kT}} dp_1 \cdot e^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}} \cdot c_2 + \int_{-\bar{p}_2}^{+\bar{p}_2} e^{-\frac{a_2 p_2^2}{2kT}} dp_2 \cdot e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}} \cdot c_1 \Big\}.$$

$$\int e^{-\frac{E'}{kT}} dp_3 \ldots dp_\mu dq_1 \ldots dq_\mu$$

oder

$$n = A \left\{ \frac{2}{\sqrt{a_1 a_2}} \pi k T + \sqrt{\frac{2}{a_1}} \pi k T \cdot e^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}} \cdot c_2 + \sqrt{\frac{2}{a_2}} \pi k T \cdot e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}} \cdot c_1 \right\} \int e^{-\frac{E'}{kT}} dp_3 \ldots dp_\mu dq_1 \ldots dq_\mu \quad (15)$$

Da die ε immer sehr groß sind, so kann in diesem Ausdruck das zweite und dritte Glied gegenüber dem ersten vernachlässigt werden, so daß

$$n = A \sqrt{\frac{2}{a_1 a_2}} \pi k T \int e^{-\frac{E}{kT}} dp_3 \ldots dp_\mu dq_1 \ldots dq_\mu$$

und

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dt} = k = \frac{1}{4} e^{-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{kT}} \cdot \frac{\frac{dE}{dt}}{\frac{c_2}{a_1 p_1} + \frac{c_1}{a_2 p_2}} \sqrt{a_1 a_2}$$

$$= e^{-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{kT}} \frac{dE}{dt} \cdot T^{-1} \cdot \text{const} \quad (16)$$

für k' aber ergibt sich, wie man sich leicht überzeugt, ein Ausdruck, der proportional ist $\frac{dE}{dt}$ und die Temperatur nicht enthält. Es wird also

$$\frac{k}{k'} = e^{-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{kT}} T^{-1} \cdot \text{const};$$

und

$$\frac{d \lg \frac{k}{k'}}{dt} = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{kT^2} \to \frac{1}{T} = \frac{N(\varepsilon_1+\varepsilon_2) - RT}{RT^2}. \quad (17)$$

Da für den Fall zweier Bindungen die Wärmetönung gleich $N(\varepsilon_1+\varepsilon_2) - RT$ ist, so ist also wiederum die Gleichung der Reaktionsisochore erfüllt. —

Vergleichen wir noch die gefundenen Ausdrücke mit den Formeln, die im Anschluß an die Thermodynamik für den Geschwindigkeitskoeffizienten k vorgeschlagen wurden. Arrhenius setzte

$$\frac{d \lg k}{dT} = \frac{A}{T^2}$$

van 't Hoff

$$\frac{d \lg k}{dT} = \frac{A}{T^2} + B$$

und Kooy

$$\frac{d \lg k}{dT} = \frac{A}{T^2} + \frac{B}{T},$$

wobei A, B, C Konstante bedeuten. Nach (8) und (16) ist:

$$\frac{d \lg k}{dT} = \frac{A}{T^2} + \frac{B}{T} + \frac{d \lg \frac{dE}{dt}}{dT}$$

ein Ausdruck, der für $\frac{dE}{dt} = \text{const}$ in die Formel von Kooy übergeht.

4.

Man hat sich vielfach an die Auffassung gewöhnt, die Geschwindigkeit einer chemischen Reaktion werde durch die treibende Kraft der Affinität hervorgebracht, der ein gewisser nicht weiter erfaßbarer „chemischer Widerstand" entgegenwirke und hat demnach die Geschwindigkeit durch den Quotienten aus Affinität und Widerstand darzustellen versucht. Eine solche Auffassung ist nur bei kondensierten Systemen berechtigt, nämlich dann, wenn der Prozeß an sich mit unendlich großer Geschwindigkeit verläuft und nur durch Reibungswiderstände verlangsamt wird. Keineswegs darf aber die Meinung entstehen, daß eine solche Darstellungsweise allgemein berechtigt wäre; bei gasförmigen Systemen kann von irgendeinem Widerstand nicht gesprochen werden, ohne daß deshalb die Reaktionsgeschwindigkeit unendlich werden muß.

Nach der in Nr. 1 aufgestellten Hypothese tritt Zerfall eines Moleküls mit einer Bindung immer dann ein, wenn $p_1 = \bar{p}_1$ wird. Da nun bei der absoluten Temperatur T der Mittelwert von p_1 gegeben ist durch $\frac{1}{2} a_1 \bar{p}_1^2 = \frac{1}{2} kT$, so folgt, daß es eine Temperatur T_0 geben muß, für welche der Durchschnittswert von $p_1 = \bar{p}_1$ ist, bei der also ein Zusammenhalt der Moleküle nicht mehr möglich ist. Diese kritische Temperatur ergibt sich aus $kT_0 = a_1 \bar{p}_1^2 = 2\varepsilon$. Es existiert also für jede Verbindung eine kritische Temperatur T_0, oberhalb welcher die Verbindung bei keinem noch so starken Druck existenzfähig ist.

Nehmen wir, um von der Höhe dieser kritischen Temperaturen eine Schätzung zu erhalten, als einfaches Beispiel die Reaktion $K + J = KJ$. Die Wärmetönung dieser Reaktion ist ungefähr 80000 Kal. pro Gramm Molekül KJ. Um ε zu finden, hätten wir an dieser Zahl nach (13) eine Korrektur anzubringen, die aber gegenüber der großen Zahl nicht ins Gewicht fällt. Für T_0 ergibt sich also $RT_0 = 2.80000$ oder $T_0 = 80000°$.

Man schätzt die Temperatur der heißesten Heliumsterne auf etwa 25000°. Sie würde also noch keineswegs hinreichen, um die Existenz von Verbindungen auf der Oberfläche des Sternes unmöglich zu machen. Doch mögen im Innern der Sterne Temperaturen bestehen, bei denen Verbindungen auch unter den dort herrschenden ungeheuren Drucken nicht mehr existenzfähig sind.

5.

Über die durchschnittliche Energieänderung $\frac{dE}{dt}$ sind ohne Zuhilfenahme spezieller Hypothesen keine bestimmten Aussagen möglich. Bei photochemischen Prozessen wird durch die Einwirkung des Lichtes dE vergrößert, indem das Molekül aus der umgebenden Lichtstrahlung durch Resonanz Energie aufnimmt und dadurch in seinem Zerfall gefördert wird. Vielleicht daß auch bei gewissen Arten von katalytischen Vorgängen eine ähnliche Auffassung möglich ist, nämlich jenen, bei welchen Ionen, insbesondere Wasserstoffionen auf die Geschwindigkeit eines Prozesses beschleunigend einwirken. Es seien im folgenden die Überlegungen, die man für eine solche Vermutung vorbringen könnte, angedeutet.

Denken wir uns, um eine zweckmäßig vereinfachte Vorstellung zu gewinnen, die (elektrische) Bindung des Moleküls, auf deren Zerreißung es ankomme, ersetzt durch einen Resonator, bestehend aus zwei entgegengesetzt geladenen Polen; die Eigenfrequenz des Resonators sei mit ν_0 bezeichnet und der Resonator möge die Eigenschaft haben, daß seine potentielle Energie den kritischen Betrag ε nicht überschreiten kann, ohne in seine Pole zu zerfallen. Dieser Resonator wird sich mit der umgebenden Strahlung ins Gleichgewicht setzen und dabei einen von der Intensität dieser Strahlung abhängigen Mittelwert von Energie annehmen; denn der Resonator wird fortwährend Energie absorbieren und gleichzeitig durch Ausstrahlung wieder verlieren, so daß die Energie um einen gewissen Mittelwert hin- und herschwankt. Dieser Mittelwert wird, falls nur Wärmestrahlung vorhanden ist, lediglich von der Temperatur abhängen.

Es seien jetzt Ionen mit einer gewissen Konzentration vorhanden. Dann wird das Molekül bei jedem Zusammenstoß mit einem Ion in ein starkes elektrisches Feld geraten und die in die Achse des Resonators fallende Komponente der elektrischen Feldstärke wird positive oder negative Arbeit leisten. Bezeichnen wir diese Komponente mit X, so wird sich X in höchst unregelmäßiger Weise mit der Zeit ändern. Aber wie unregelmäßig auch immer dieser Wechsel stattfinden möge, stets kann man nach Fourier X als zusammengesetzt ansehen aus einer sehr großen Zahl von regelmäßigen Sinus- und Cosinus-Schwingungen, so daß

$$X=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n t}{\tau}+b_n \sin\frac{2\pi n t}{\tau}, \qquad (18)$$

wobei über alle positiven ganzen Zahlen von n zu summieren ist und die Konstanten a_n und b_n sich von Glied zu Glied beliebig ändern. Quadriert man (18) und bildet den Mittelwert von X^2 durch Integration über einen großen Zeitraum, so wird

$$\overline{X^2}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2+b_n^2. \qquad (19)$$

Nun ist aber X^2 immer dann von Null verschieden, solange sich der Resonator im Wirkungsbereich des Ions befindet; also bei jedem Zusammenstoß durchschnittlich eine gewisse Zeit Δt. In der Zeit zwischen zwei Zusammenstößen ist X^2 gleich Null. Bedeutet $(\overline{X^2})$ den Mittelwert von X^2 innerhalb des Anziehungsbereiches, so ist demnach

$$\overline{X^2}=\frac{N\cdot(\overline{X^2})\cdot\Delta t}{\mathfrak{T}} \qquad (20)$$

wenn mit N die Zahl der Zusammenstöße innerhalb der großen Zeit $\mathfrak{T}$ bezeichnet wird. Sind c und c' die Konzentrationen von Molekül und Ion, so ist N und demnach auch $\Sigma(a_n^2+b_n^2)$ proportional dem Produkt $c\cdot c'$.

Aus der Zerlegbarkeit der Kraft X in eine Fouriersche Reihe folgt eine Resonanzwirkung des beständig sich ändernden elektrischen Feldes auf das Molekül. Nehmen wir die Bindung des Moleküls von quasielastischer Art an, so ist die Energie des Oszillators gegeben durch einen Ausdruck von der Form

$$^1/_2 L\dot{x}^2+{}^1/_2 K x^2, \qquad (21)$$

wenn mit x die Entfernung der schwingenden Pole voneinander bezeichnet wird. Die Eigenschwingungszahl des Oszillators ist dann gegeben durch

$$\nu_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{L}}.$$

Die Wirkung der Kraft X besteht in

$$X\,dx=L\,x\,dx+K\,\dot{x}\,d\dot{x}$$

oder

$$X=L\ddot{x}+K\dot{x}=\sum_{1}^{\infty}\left(a_n\cos 2\pi n\frac{t}{\tau}+b_n\sin 2\pi n\frac{t}{\tau}\right) \qquad (23)$$

die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$x=\sum L4\pi^2\frac{a_n}{\left(\nu_0^2-\frac{n^2}{\tau^2}\right)}\left(\cos 2\pi\frac{nt}{\tau}-\cos 2\pi\nu_0 t\right) \qquad (24)$$

$$+L4\pi^2\frac{b_n}{\left(\nu_0^2-\frac{n^2}{\tau^2}\right)}\left(\sin 2\pi n\frac{t}{\tau}-\frac{n}{\tau\nu_0}\sin 2\pi\nu_0 t\right).$$

Es treten also in erster Linie jene Glieder von (18) in Wirksamkeit, deren Frequenz $2\pi\frac{n}{\tau}$ nahe mit der Eigenfrequenz des Resonators übereinstimmen. Aus der Theorie der Resonanz ergibt sich nun für die hervorgerufene Änderungsgeschwindigkeit der Energie $\frac{dE}{dt}$ ein Ausdruck, der proportional ist $a_0^2+b_0^2$, wenn a_0^2 und b_0^2 die Mittelwerte seiner a_n^2 und b_n^2 bedeuten, deren zugehörige Frequenzen in der Nachbarschaft der Eigenfrequenzen des Resonators liegen.

Nach dem Frühern ist $\Sigma a_n^2+b_n^2$ proportional der Zahl der Zusammenstöße. Daraus ist freilich noch nicht zu schließen, daß auch $a_0^2+b_0^2$ dieser Zahl proportional sein muß; denn es ist durch die Zahl der Zusammenstöße selbst eine gewisse Periodizität gegeben, wodurch unter den a_n und b_n gewisse Werte ausgezeichnet werden. Diese ausgezeichneten Werte verschieben sich mit zunehmender Zahl der Zusammenstöße nach der Seite der größeren Frequenzen. Man kann aber annehmen, daß die Eigenfrequenzen eines Moleküls so groß sind, daß sie von dieser Änderung nicht betroffen werden; denn offenbar ist die Zahl der Eigenschwingungen des Moleküls in den weitaus meisten Fällen viel größer als die der Zusammenstöße. Dann wird aber $a_0^2+b_0^2$ proportional der Konzentration c' der Ionen.

Ist $\frac{dE}{dt}$ ohne Vorhandensein von Ionen verschwindend klein, so wird also

$$\frac{dE}{dt}=a\cdot c' \qquad (24)$$

und die Anzahl dn der dissoziierten Moleküle wird im Falle einer einzigen Bindung nach (8)

$$dn=e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}T^{-1/2}\cdot c'\cdot \text{const.}, \qquad (25)$$

also proportional der Anzahl der Ionen.

(Eingegangen 15. Januar 1917.)

Fragen der Pyro- und Piezoelektrizität der Kristalle. III. Über die experimentelle Bestimmung der permanenten zentrisch-symmetrischen Momente.

Von W. Voigt.

1. In zwei früheren Arbeiten[1]) habe ich Erscheinungen besprochen, die bei Kristallen, deren Volumenelemente elektrische Momente zweiter Ordnung (von zentrischer Symmetrie also) besitzen, auftreten können, wenn dieselben Temperaturänderungen oder Deformationen unterworfen werden. Ich habe dabei auch über meine älteren Versuche berichtet, die jene zentrisch-symmetrischen pyro- und piezoelektrischen Erregungen als wirklich vorkommend erwiesen zu haben scheinen. Die Vergleichung der zentrischen mit den früher allein untersuchten azentrischen oder polaren Erregungen ließ manche auffallenden Gegensätze hervortreten; ein besonderes Interesse erweckte von diesen der folgende.

Die zentrische, wie die azentrische elektrische Erregung geschieht auf eine doppelte Weise. Im ursprünglichen (homogenen) Zustande sind die inneren elementaren oder molekularen Momente durch eine auf dem Kristall influenzierte Oberflächenladung bezüglich ihrer Wirkung kompensiert. Bei der thermischen oder mechanischen Deformation ändern sich rein geometrisch die Verhältnisse derartig, daß jene Kompensation nicht länger erhalten bleibt, und die innern Momente wirksam werden. Daneben tritt aber durch die genannten Einwirkungen auch noch eine physikalische Änderung jener innern Momente ein, deren Effekt sich dem ersteren superponiert.

Es entsteht die Frage, die namentlich gegenüber der modernen Theorie der Kristallstruktur Wichtigkeit gewinnt, ob es möglich ist, durch die Beobachtung von pyro- oder piezoelektrischen Erscheinungen die beiden Vorgänge zu trennen, insbesondere, ob es möglich ist, auf eine solche Weise Schlüsse auf die Art und Größe der ursprünglichen oder dauernden molekularen Momente zu ziehen. Die in der zweiten zitierten Arbeit mitgeteilte Berechnung ergab, daß dies bei den azentrischen oder polaren Vorgängen nicht angeht, daß bei ihnen vielmehr beide Wirkungen dieselben formalen Gesetze befolgen, — daß demgemäß ihre Parameter immer in gleicher Weise kombiniert auftreten und sich somit durch die Beobachtung nicht trennen lassen. Die Untersuchung ergab aber weiter, daß die zentrischen Erregungen sich in der genannten Richtung anders verhalten, daß hier nämlich die Trennung beider Vorgänge prinzipiell möglich erscheint, wenn dies auch keineswegs bei jeder Art der Deformation ausführbar ist. Es blieb a. a. O. schließlich vorbehalten, bei bestimmten, sowohl der Theorie als der Beobachtung zugänglichen Anordnungen diese Verhältnisse im einzelnen aufzuklären.

Einen Schritt in der hiermit bezeichneten Richtung will die nachstehende Untersuchung tun. Nachdem in der vorigen Arbeit gezeigt

1) W. Voigt, diese Zeitschr. 17. 287 u. 307, 1916.

war, daß der (einfachste) Fall eines homogen deformierten Kristallpräparates zu einer Trennung der beiden Effekte nicht führt, sind hier die bez. Rechnungen für den Fall der längs der Achse gleichförmigen Biegung oder Drillung eines Kreiszylinders durchgeführt, wobei der Zylinder aus einem beliebigen Kristall in beliebiger Orientierung herausgeschnitten zu denken ist. Dieser Fall zeichnet sich dadurch aus, daß für ihn nicht nur das elastische Problem einfach zu lösen ist, sondern daß auch das Potential der durch die bez. Deformation bewirkten elektrischen Erregung einfach und relativ streng berechnet werden kann. Mit letzterem hängt dann auch die leichte Ermittelbarkeit der Dichte der kompensierenden Oberflächenschicht im ursprünglichen und im deformierten Zustande zusammen. Das Problem hat also eine Reihe von günstigen Eigenschaften, die es der Bearbeitung empfehlen. Es wird sich zeigen, daß die behandelten Deformationen und elektrischen Erregungen zu denen gehören, welche Rückschlüsse auf die permanenten Momente der Kristalle gestatten.

2. Die Achse des Kreiszylinders sei zur Z-Achse gewählt; sie, wie die X- und die Y-Achse seien beliebig gegen den Kristall orientiert. „Gleichförmig längs der Z-Achse deformiert" nennen wir den Zylinder, wenn die Deformations- und Spannungskomponenten nicht von z abhängen. Solche Zustände treten durch Einwirkungen ein, die nur allein auf die Grundflächen des Zylinders ausgeübt werden; es sind von ihnen drei Gattungen zu unterscheiden: 1. eine Längsdehnung, bewirkt durch eine normale Zugkraft, 2. eine Biegung, bewirkt durch ein Drehungsmoment um eine Querrichtung, 3. eine Drillung, bewirkt durch ein Moment um die Längsachse des Zylinders. (Im allgemeinen rufen übrigens die Momente der ersten Art neben der Biegung sekundär eine geringe Drillung, diejenigen zweiter Art neben der Drillung sekundär eine geringe Biegung hervor.) Nur Biegung und Drillung kommen für uns hier in Betracht; die Längsdehnung fällt unter die oben erwähnte speziellere homogene Deformation, die bereits in der vorigen Arbeit erledigt worden ist.

Die allgemeinen Ansätze für die Verrückungskomponenten u, v, w, der Punkte des Zylinders, welche von z unabhängige Deformationen liefern, lauten:[1])

$$\begin{aligned} u &= U + z(f_1 - hy) - {}^1/_2 z^2 g_1, \\ v &= V + z(f_2 + hx) - {}^1/_2 z^2 g_2, \\ w &= W + z(g_1 x + g_2 y + g_3). \end{aligned} \tag{1}$$

1) W. Voigt, Gött. Abh. 1887 S. 56; Kristallphysik, Leipzig u. Berlin 1910, S. 622.

In ihnen stellt h die spezifische Drillung um die Z-Achse dar, g_1 und g_2 sind die reziproken Krümmungsradien der Projektionen der materiellen Linie, die ursprünglich in der Z-Achse lag, auf die XZ- und YZ-Ebene; g_3 mißt die Längsdilatation dieser materiellen Linie und verschwindet in den uns allein interessierenden Fällen der gleichförmigen Biegung oder Drillung. U, V, W stellen Funktionen von x und y allein dar, die im Falle eines kreisförmigen Querschnittes und gleichförmiger Biegung oder Drillung vom zweiten Grade sind. Die Konstanten f_1 und f_2 bestimmen sich aus den Befestigungsbedingungen, und gleiches gilt für einen Teil der Parameter von U, V, W.

Als Befestigungsbedingungen wählen wir, daß für $x = y = z = 0$ gelten soll

$$\begin{aligned} &u = v = w = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Die erste Bedingung hält den Punkt, der anfangs in den Koordinatenanfang fiel, an seiner Stelle fest, die zweite verhindert eine Drehung des dem Koordinatenanfang benachbarten Raumelementes des Zylinders um die Z-Achse, die dritte fordert die Erhaltung der Richtung des ebenda liegenden Elementes der ursprünglich in die Z-Achse fallenden materiellen Linie.

Diese Bedingungen ergeben die Beziehungen, daß für $x = y = 0$

$$U = V = W = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

sein muß; dazu

$$f_1 = f_2 = 0.$$

Für die Deformationsgrößen folgen nunmehr die Ausdrücke

$$\begin{aligned} &x_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \; y_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \; z_z = g_1 x + g_2 y, \\ &y_z = \frac{\partial W}{\partial y} + hx, \; z_x = \frac{\partial W}{\partial x} - hy, \\ &x_y = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}; \end{aligned} \tag{4}$$

ferner für die Drehungen um die Koordinatenachsen die Werte

$$\begin{aligned} \lambda &= {}^1/_2 \frac{\partial W}{\partial y} + g_2 z - {}^1/_2 hx, \\ \mu &= -{}^1/_2 \frac{\partial W}{\partial x} - g_1 z - {}^1/_2 hy, \\ \nu &= {}^1/_2 \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) + hz. \end{aligned} \tag{5}$$

Setzen wir an

$$\begin{aligned} U &= {}^1/_2 a_1 x^2 + b_1 xy + {}^1/_2 c_1 y^2, \\ V &= {}^1/_2 a_2 x^2 + b_2 xy + {}^1/_2 c_2 y^2, \\ W &= {}^1/_2 a_3 x^2 + b_3 xy + {}^1/_2 c_3 y^2, \end{aligned} \tag{6}$$

so sind damit die Beziehungen (3) identisch erfüllt. Bezeichnet man die 21 Elastizitätsmoduln des Kristalles mit s_{kk}, so folgt aus den allgemeinen elastischen Grundformeln für den Fall der Einwirkung von Drehungsmomenten L, M, N um die Koordinatenachsen auf die positive Endfläche des Kreiszylinders das System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 Qx^2 &= -s_{13}M + {}^1/_2 s_{14}N, \\ b_2 Qx^2 &= -s_{23}M + {}^1/_2 s_{24}N, \\ g_1 Qx^2 &= -s_{33}M + {}^1/_2 s_{34}N; \\ b_1 Qx^2 &= +s_{13}L - {}^1/_2 s_{15}N, \\ c_2 Qx^2 &= +s_{23}L - {}^1/_2 s_{25}N, \\ g_2 Qx^2 &= +s_{33}L - {}^1/_2 s_{35}N; \\ (b_3+h) Qx^2 &= -s_{43}M + {}^1/_2 s_{44}N, \\ a_3 Qx^2 &= -s_{53}M + {}^1/_2 s_{54}N, \\ (b_1+a_2) Qx^2 &= -s_{63}M + {}^1/_2 s_{64}N, \\ c_3 Qx^2 &= +s_{43}L - {}^1/_2 s_{45}N, \\ (b_3-h) Qx^2 &= +s_{53}L - {}^1/_2 s_{55}N, \\ (c_1+b_2) Qx^2 &= +s_{63}L - {}^1/_2 s_{65}N. \end{aligned} \tag{7}$$

Dabei stellt Qx^2 das Trägheitsmoment des Zylinderquerschnittes um einen Durchmesser dar, ist also beim Kreis vom Radius R speziell

$$= {}^1/_4 \pi R^4.$$

Durch das System (7) sind alle 12 Parameter a_k, b_k, c_k und g_1, g_2, h durch die auf den Zylinder ausgeübten Momente bestimmt. Die Ausdrücke (4) und (5) werden jetzt zu

$$\begin{aligned} x_x &= a_1 x + b_1 y, \; y_x = b_2 x + c_2 y, \; z_x = g_1 x + g_2 y, \\ y_z &= (b_3+h)x + c_3 y, \; z_x = a_3 x + (b_3-h) y, \\ x_y &= (a_2+b_1)x + (b_2+c_1) y; \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= {}^1/_2 (b_3-h) x + {}^1/_2 c_3 y + g_2 z, \\ \mu &= -{}^1/_2 a_3 x - {}^1/_2 (b_3+h) y - g_1 z, \\ \nu &= {}^1/_2 (a_2-b_1) x + {}^1/_2 (b_2-c_1) y + hz. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Drillungswinkel λ, μ, ν enthalten also mit z proportionale, aber von x und y unabhängige Terme, was für das Folgende bedeutungsvoll ist.

Die räumliche Dilatation δ ist definiert durch

$$\delta = x_x + y_y + z_z, \tag{10}$$

die lineäre Dilatation Δ in einer durch die Richtungskosinus α, β, γ bestimmten Richtung durch

$$\Delta = x_x \alpha^2 + y_y \beta^2 + z_z \gamma^2 + y_z \beta\gamma + z_x \gamma\alpha + x_y \alpha\beta. \tag{11}$$

Die Flächendilatation ϑ normal zur Richtung α, β, γ ist allgemein gegeben durch

$$\vartheta = \delta - \Delta; \tag{12}$$

handelt es sich nur um Richtungen, für die $\gamma = 0$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ist, so wird spezieller

$$\vartheta = x_x \beta^2 + y_y \alpha^2 + z_z - x_y \alpha\beta. \tag{13}$$

Hiermit sind die Beziehungen der Elastizitätstheorie, auf die wir uns zu stützen haben, für unser Problem zusammengestellt.

3. Bezeichnet wieder allgemein Π das Tensortripel der Momente zweiten Grades der Volumeneinheit, dann ist nach früherem die Potentialfunktion ψ eines mit derartigen Momenten behafteten Körpers gegeben durch

$$\psi = \int \left(\Pi \cdot \operatorname{grad}^2 \frac{1}{r} \right) dk, \tag{14}$$

ein Ausdruck, der durch ein- bzw. zweimalige teilweise Integration auf die Formen

$$\begin{aligned} \psi &= \int \left([\Pi \cdot \mathfrak{n}] \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) do \\ &\quad - \int \left(\operatorname{div} \Pi \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) dk \end{aligned} \tag{15}$$

und

$$\begin{aligned} \psi &= \int \left([\Pi \cdot \mathfrak{n}] \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) do \\ &- \int \operatorname{div}_n \Pi \frac{do}{r} + \int \operatorname{div}^2 \Pi \frac{dk}{r} \end{aligned} \tag{16}$$

gebracht werden kann. Dabei bezeichnet $\mathfrak{n}$ den Einheitsvektor in der Richtung der äußern Normalen n auf do; es sind also

$$\mathfrak{n}_x = \alpha, \; \mathfrak{n}_y = \beta, \; \mathfrak{n}_z = \gamma \tag{17}$$

die Richtungskosinus von n.

Weiter sind $[\Pi \cdot \mathfrak{n}]$ und div Π Vektoren mit den Komponenten

$$\begin{aligned} [\Pi \cdot \mathfrak{n}]_x &= \Pi_{xx}\alpha + \Pi_{xy}\beta + \Pi_{xz}\gamma, \ldots \\ \operatorname{div}_x \Pi &= \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{xz}}{\partial z}, \ldots \end{aligned} \tag{18}$$

und es ist kurz gesetzt: div div $\Pi = \operatorname{div}^2 \Pi$.

Die letzten beiden Integralen in (16) sind Newtonsche Potentiale von flächenhaften und räumlichen Ladungen; das erste Integral kann als die Wirkung einer gewissen Doppelbelegung der Oberflächen gedeutet werden.

Bezeichnen x, y, z die Koordinaten der Elemente do, bzw. dk, auf die sich die Operatoren div und grad beziehen, sind dagegen X, Y, Z diejenigen des Punktes, für den ψ gilt, dann kann man die Formel (15) auch schreiben

$$\psi = -\operatorname{Div} \int [\Pi \cdot \mathfrak{n}] \frac{do}{r} + \operatorname{Div} \int \operatorname{div} \Pi \frac{dk}{r}; \tag{19}$$

dabei bezieht sich der Operator Div auf XYZ, und unter diesem Symbol steht je ein Vektorpotential. Analog läßt sich der Ausdruck (14) in der Form geben

$$\psi = \operatorname{Div}^2 \int \Pi \frac{dk}{r}, \tag{20}$$

und es steht dabei unter dem Operator Div^2 ein Tensorpotential.

Handelt es sich um einen Körper in Form eines gegen seine Querdimensionen langen Zylinders, dessen Achse wir zur Z-Achse wählen, so ist zu erwarten, daß bei von z unabhängiger Erregung die Newtonschen Potentiale sich in logarithmische umwandeln werden. In der Tat wird, wenn man nach (14) setzt

$$\psi = J_1 + J_2,$$

$$J_1 = \int\int \left(H_{xx} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + H_{yy} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + 2 H_{xy} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \right) \partial k,$$

$$J_2 = \int\int \left(2 H_{xz} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + 2 H_{yz} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} + H_{zz} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dk \tag{21}$$

und mit $\mathfrak{Div}$ die nur auf X und Y bezügliche Divergenz bezeichnet,

$$J_1 = -\mathfrak{Div}^2 \int H \ln (r^2)\, dq, \tag{22}$$

wobei H nur die drei Komponenten H_{xx}, H_{yy} und H_{xy} hat, und J_2 wird mit wachsendem Abstand der Grundflächen des Zylinders vom Aufpunkt verschwindend klein. Denn man kann bilden

$$J_2 = \int dq \left| H_{xz} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right|_{-z_1}^{+z_2} - \int dq \left| \frac{1}{r} \left(2 \frac{\partial H_{xz}}{\partial x} + 2 \frac{\partial H_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial H_{zz}}{\partial z} \right) \right|_{-z_1}^{+z_2}$$
$$+ 2 \int ds \left| \frac{1}{r} \left(H_{xz} \alpha + H_{yz} \beta \right) \right|_{-z_1}^{+z_2}$$
$$- 2 \int\int \frac{ds\, dz}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(H_{xz} \alpha + H_{yz} \beta \right)$$
$$+ \int \frac{dk}{r} \left(2 \frac{\partial^2 H_{xz}}{\partial x \partial z} + 2 \frac{\partial^2 H_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 H_{zz}}{\partial z^2} \right), \tag{23}$$

und hierin ist das erste Integral das Newtonsche Potential von Doppelbelegungen der beiden Endquerschnitte des Zylinders, das folgende ein solches von einfachen Belegungen; das dritte stellt das Potential einer Randbelegung der Endquerschnitte dar. Diese Potentiale verschwinden — endliche Belegdichten vorausgesetzt — sämtlich, wenn die Endquerschnitte in unendliche Ferne rücken. Die letzten beiden Glieder enthalten von den Momenten nur Differentialquotienten nach z und verschwinden daher stets, falls die Momente von z unabhängig sind.

In dem Fall, der im Eingang charakterisiert ist, trifft die letztere Annahme nun aber im allgemeinen nicht zu; die Momente $H_{xx} \ldots$ enthalten dabei vielmehr u. U. ein additives Glied, das mit z proportional, aber von x und y unabhängig ist. Bezeichnen wir dasselbe in H_{xx}, H_{yz}, H_{zz} bzw. mit $f_1 z$, $f_2 z$, $f_3 z$, dann gibt die letzte Formel die von den f_k abhängigen Glieder J_2' in J_2 zu

$$J_2' = f_3 \int dq \left| z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right|_{-z_1}^{+z_2} + 2 \int ds \left| \frac{z}{r} (f_1 \alpha + f_2 \beta) \right|_{-z_1}^{+z_2}$$
$$- 2 \int\int \frac{ds\, dz}{r} (f_1 \alpha + f_2 \beta). \tag{24}$$

Rücken nun die Endquerschnitte des Zylinders in sehr große Entfernung, so verschwindet das erste Integral; das zweite wird (da z/r gegen $\pm$ Eins konvergiert) zu einer Konstanten, die in einem Ausdruck für ein Potential irrelevant ist. Das letzte Integral gibt das logarithmische Potential einer Kurvenbelegung, so daß geschrieben werden kann

$$J_2' = + 2 \int ds\, (f_1 \alpha + f_2 \beta) \ln (r^2), \tag{25}$$

falls r jetzt die Entfernung des in der XY-Ebene liegenden Aufpunktes XY von dem ebenda befindlichen Linienelement ds bezeichnet. Dies J_2' ist aber keine Konstante und muß demgemäß in Rechnung gesetzt werden. Hiernach kann man für den vorausgesetzten Fall, daß H_{xz}, H_{yz}, H_{zz} additive in z multiplizierte Glieder enthalten, das Endresultat für J_2 bei unendlicher Länge des Zylinders schreiben

$$J_2 = 2 \int ds \left(\frac{\partial H_{xz}}{\partial z} \alpha + \frac{\partial H_{yz}}{\partial z} \beta \right) \ln (r^2). \tag{26}$$

Haben H_{xx}, H_{yy}, H_{xy} die analoge Natur wie H_{xz}, H_{yz}, H_{zz} so verlangt auch das Integral J_1 eine genauere Betrachtung, und der Ausdruck (22) gilt zunächst nur für die von z unabhängigen Glieder. Im übrigen schreiben wir

$$J_1 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} \int H_{xx} \frac{dk}{r} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \int H_{yy} \frac{dk}{r} + 2 \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \int H_{xy} \frac{dk}{r} \tag{27}$$

und knüpfen die Betrachtung an ein beliebiges dieser drei Newtonschen Raumpotentiale an. Ein mit z proportionales Glied in einer der drei Komponenten H_{xx}, H_{yy}, H_{xy} führt auf ein Integral von der Form

$$\zeta = \int dq \int_{-z_1}^{+z_2} \frac{z\, dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \int dq \left\{ \sqrt{r^2 + z_2^2} - \sqrt{r^2 + z_1^2} \right\}, \tag{28}$$

wobei r den Abstand des Aufpunktes von dem Querschnittselement dq bezeichnet. Ist r klein neben z_1 und z_2, so wird in zweiter Annäherung

$$\zeta = \int dq\,(z_2 - z_1)\left(1 - \frac{r^2}{2\,z_1\,z_2}\right) = (z_2 - z_1)\left\{Q - \frac{1}{2\,z_1\,z_2}\int r^2\,dq\right\}. \tag{29}$$

Rechnet man z, bzw. Z, von der Mitte der Zylinderachse aus, setzt also bei Einführung der Zylinderlänge l

$$z_2 = {}^1/_2\,l - Z,\quad z_1 = {}^1/_2\,l + Z$$

und vernachlässigt in dem Glied zweiter Ordnung Z^2 neben ${}^1/_4\,l^2$, so erhält man schließlich

$$\zeta = -2ZQ\left(1 - \frac{2}{Ql^2}\int r^2\,dq\right). \tag{30}$$

ζ wird hiernach proportional mit Z, verschwindet also in der XY-Ebene, läßt sich aber im übrigen nicht durch Vergrößerung der Zylinderlänge l herabdrücken. Die Berücksichtigung der zweiten Annäherung gibt in dem Faktor von Z ein von X und Y abhängiges Glied, das indessen durch Vergrößerung von l immer unmerklich gemacht werden kann.

Nun stehen aber die Glieder von der Form (28) in dem Ausdruck (27) unter den Differentialzeichen nach X und Y; sie sind demnach ohne Wirkung auf ψ, falls die Endquerschnitte des Zylinders hinreichend fern sind.

Demgemäß gelangen wir zu dem Endresultat, daß für den Fall alle Komponenten $H_{xx}, \ldots$ additive in z multiplizierte, aber von x und y unabhängige Glieder enthalten, dann geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}\psi &= J_1 + J_2\\ &= -\mathfrak{Div}^2\int H \ln(r^2)\,dq\\ &\quad + 2\int \frac{\partial}{\partial z}\left(H_{xz}\,\alpha + H_{yz}\,\beta\right)\ln(r^2)\,ds.\end{aligned} \tag{31}$$

4. Wir wollen nun von dem ursprünglichen Zustand des Kreiszylinders ausgehen, in welchem alle Momente $H_{xx}, \ldots$ konstant $= H_{xx}^0, \ldots$ waren, und ihre Wirkung nach außen durch eine influenzierte Oberflächenladung kompensiert wurde. Hier liefert (31)

$$\psi_0 = -Q\left[H_{xx}^0\frac{\partial^2}{\partial X^2}\ln(P^2) + H_{yy}^0\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\ln(P^2) + 2\,H_{xy}^0\frac{\partial^2}{\partial X\,\partial Y}\ln(P^2)\right],$$

wobei $P^2 = X^2 + Y^2$. Dies gibt

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \frac{2\pi R^2}{P^4}\{(H_{xx}^0 - H_{yy}^0)(X^2 - Y^2) + 4H_{xy}^0 XY\}\\ &= 2\pi\left(\frac{R}{P}\right)^2\{(H_{xx}^0 - H_{yy}^0)\cos 2\Omega + 2H_{xy}^0\sin 2\Omega\},\end{aligned} \tag{32}$$

bei $X = P\cos\Omega$, $Y = P\sin\Omega$. Der homogen erregte Kreiszylinder gibt sonach stets ein Feld mit zwei zueinander normalen Symmetrielinien, innerhalb von Quadranten wechselweis entgegengesetzten Verhaltens.

Eine Oberflächenladung von der Dichte

$$\sigma^0 = L\alpha^2 + M\beta^2 + N\alpha\beta \tag{33}$$

bei $\alpha = \cos\omega$, $\beta = \sin\omega$ würde eine Potentialfunktion

$$\begin{aligned}\psi_0^0 &= -\pi R\{L[\ln(P^2) - {}^1/_2\left(\frac{R}{P}\right)^2(X^2 - Y^2)]\\ &\quad + M[\ln(P^2) + {}^1/_2\left(\frac{R}{P}\right)^2(X^2 - Y^2)] - N\left(\frac{R}{P}\right)^2 XY\}\end{aligned} \tag{34}$$

liefern. Damit σ^0 die Wirkung des Momentes H^0 kompensiere, ist somit erforderlich, daß

$$\begin{aligned}L &= -M = -\frac{2}{R}(H_{xx}^0 - H_{yy}^0),\\ N &= -\frac{8}{R}H_{xy}^0.\end{aligned} \tag{35}$$

Nach der Deformation, welche jedes Flächenelement im Verhältnis $1 + \vartheta : 1$ vergrößert, kommt die Dichte σ^0 nur in der reduzierten Stärke $\sigma' = \sigma^0(1 - \vartheta)$ zur Wirkung; daneben hat der Kreiszylinder seine Form geändert. Aber dieser letztere Umstand, der natürlich in Rechnung zu setzen wäre, wenn es sich allein um die Wirkung von σ^0 handelte, kann bei dem vorliegenden Problem, wo es sich um das Zusammenwirken der Oberflächenladungen und der räumlichen Momente H handelt, außer Betracht bleiben. In der Tat: Im ursprünglichen Zustand wurde die Wirkung der inneren Momente durch die Oberflächenladung kompensiert. Im deformierten Zustande ist dies nicht mehr der Fall; aber wir betrachten die wirksamen Veränderungen (wie die sie veranlassenden Deformationen selbst) als Größen erster Ordnung und vernachlässigen ein für allemal Terme von höherer als dieser Ordnung. Der Einfluß der Gestaltänderung auf die Wirkung des unkompensierten Teiles der Oberflächenladung würde aber von zweiter Ordnung sein. Darum können wir, wenn wir das Potential der Oberflächenladung berechnen, von der Gestaltänderung absehen; natürlich besitzt aber der so gewonnene Ausdruck keine selbständige Bedeutung und darf nur zusammen mit dem Potential der räumlichen Momente angewendet werden.

Bei dieser Einschränkung der Bedeutung kann man die Potentialfunktion der Oberflächenladung σ' nach der Deformation schreiben

$$\psi_\sigma' = \frac{2}{R}\int\left\{(\Pi_{xx}^0 - \Pi_{yy}^0)(\alpha^2-\beta^2) + 4\Pi_{xy}^0\alpha\beta\right\} \cdot (1-\vartheta)\ln(r^2)\,ds. \quad (36)$$

Für ϑ liefert die Kombination der Formeln (13) und (8) den Ausdruck

$$\vartheta = R[g_1\alpha + g_2\beta + b_2\alpha^3 + (c_2 - a_2 - b_1)\alpha^2\beta + (a_1 - b_2 - c_1)\alpha\beta^2 + b_1\beta^3]; \quad (37)$$

eine einfache Umformung führt davon zu

$$\vartheta = R(d_1\cos\omega + d_2\sin\omega - e_1\cos 3\omega + e_2\sin 3\omega) \quad (38)$$

bei

$$\alpha = \cos\omega,\ \beta = \sin\omega$$

$$d_1 = g_1 + {}^1\!/_4(2b_2 + a_1 - c_1), \qquad d_2 = g_2 + {}^1\!/_4(2b_1 + c_2 - a_2), \quad (39)$$

$$e_1 = {}^1\!/_4(a_1 - c_1 - 2b_2),\ e_2 = {}^1\!/_4(c_2 - a_2 - 2b_1).$$

Für ψ_σ' ergibt sich hiermit

$$\psi_\sigma' = \psi_\sigma^0 - 2\int[(\Pi_{xx}^0 - \Pi_{yy}^0)\cos 2\omega + 2\Pi_{xy}^0\sin 2\omega] \cdot (d_1\cos\omega + d_2\sin\omega - e_1\cos 3\omega + e_2\sin 3\omega)\ln(r^2)\,ds. \quad (40)$$

Die Ausrechnung führt auf Integrale von der Form

$$-\int\cos n\omega\ln(r^2)\,ds = \frac{2\pi R}{n}\left(\frac{R}{P}\right)^n\cos n\Omega = 2\pi R C_n, \quad (41)$$

$$-\int\sin n\omega\ln(r^2)\,ds = \frac{2\pi R}{n}\left(\frac{R}{P}\right)^n\sin n\Omega = 2\pi R S_n$$

für $n > 0$, wobei C_n, S_n Abkürzungen sind. Bei ihrer Benutzung erhält man als Potentialfunktion der durch die Deformation veränderten Oberflächenladung σ'

$$\psi^{\sigma'} = \psi_\sigma^0 + 2\pi R\cdot \{(\Pi_{xx}^0 - \Pi_{yy}^0)[(d_1 - e_1)C_1 + (e_2 - d_2)S_1 + d_1C_3 + d_2S_3 - e_1C_5 + e_2S_5] + 2\Pi_{xy}^0[(d_2 + e_2)C_1 + (d_1 + e_1)S_1 - d_2C_3 + d_1S_3 - e_2C_5 - e_1S_5]\}. \quad (42)$$

Dies Resultat stellt das Feld der deformierten Ladung σ' dar als die Superposition von drei Feldern verschiedener Symmetrie, die je durch das Auftreten von Ω_1 $3\,\Omega_2$ und $5\,\Omega$ unter den trigonometrischen Funktionen charakterisiert sind.

5. Wir wollen nun den Anteil an der Potentialfunktion berechnen, den das ursprüngliche Moment Π^0 nach der Deformation liefert; letzteres gelangt dabei, wie früher gezeigt, mit Komponenten zur Geltung, die gegeben sind durch

$$\begin{aligned}
(\Pi^0)_{xx} &= \Pi_{xx}^0(1-\delta) + 2(\Pi_{xx}^0\mu - \Pi_{xy}^0\nu),\\
(\Pi^0)_{yy} &= \Pi_{yy}^0(1-\delta) + 2(\Pi_{xy}^0\nu - \Pi_{yz}^0\lambda),\\
(\Pi^0)_{zz} &= \Pi_{zz}^0(1-\delta) + 2(\Pi_{yz}^0\lambda - \Pi_{zx}^0\mu),\\
(\Pi^0)_{yz} &= \Pi_{yz}^0(1-\delta) + (\Pi_{yy}^0 - \Pi_{zz}^0)\lambda + \Pi_{zx}^0\nu - \Pi_{xy}^0\mu, \quad (43)\\
(\Pi^0)_{zx} &= \Pi_{zx}^0(1-\delta) + (\Pi_{zz}^0 - \Pi_{xx}^0)\mu + \Pi_{xy}^0\lambda - \Pi_{yz}^0\nu,\\
(\Pi^0)_{xy} &= \Pi_{xy}^0(1-\delta) + (\Pi_{xx}^0 - \Pi_{yy}^0)\nu + \Pi_{yz}^0\mu - \Pi_{zx}^0\lambda.
\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind also nun in die Formel (31) statt der allgemeinen $\Pi_{xx}, \ldots$ einzusetzen; es dürfen dabei aber nach dem in § 3 allgemein Gezeigten in dem ersten Integral J_1 die mit z proportionalen Terme von vornherein fortbleiben.

Setzt man kurz nach (10) und (8)

$$\delta = (a_1 + b_2 + g_1)x + (b_1 + c_2 + g_2)y = ax + by,$$

so wird der erste Teil J_1 von ψ zu

$$\begin{aligned}
J_1 = &-\frac{\partial^2}{\partial X^2}\int\Big|\Pi_{xx}^0(1-(ax+by)) - \Pi_{zx}^0(a_3x + (b_3+h)y)\\
&-\Pi_{xy}^0((a_2-b_1)x + (b_2-c_1)y)\Big|\ln(r^2)\,dq\\
&-\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\int\Big|\Pi_{yy}^0(1-(ax+by)) + \Pi_{xy}^0((a_2-b_1)x + (b_2-c_1)y) \quad (44)\\
&-\Pi_{yz}^0((b_3-h)x + c_3y)\Big|\ln(r^2)\,dq\\
&-2\frac{\partial^2}{\partial X\,\partial Y}\int\Big|\Pi_{xy}^0(1-(ax+by))\\
&+(\Pi_{xx}^0 - \Pi_{yy}^0)^1\!/_2((a_2-b_1)x + (b_2-c_1)y)\\
&-\Pi_{yz}^0{}^1\!/_2(a_3x + (b_3+h)y\\
&-\Pi_{zx}^0{}^1\!/_2((b_3-h)x + c_3y)\Big|\ln(r^2)\,dq.
\end{aligned}$$

Hierin liefern die drei konstanten Glieder in den Klammern das Potential ψ_0 vor der Deformation; wir schreiben daher bei Einführung von sogleich erkennbaren Abkürzungen

$$\begin{aligned}
J_1 = \psi_0 &+ \frac{\partial^2}{\partial X^2}\int(A_1x + B_1y)\ln(r^2)\,dq\\
&+ \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\int(A_2x + B_2y)\ln(r^2)\,dq \quad (45)\\
&+ 2\frac{\partial^2}{\partial X\partial Y}\int(A_3x + B_3y)\ln(r^2)\,dq.
\end{aligned}$$

Nun ist aber für einen kreisförmigen Querschnitt

$$\int(Ax + By)\ln(r^2)\,dq = -\frac{\pi R^4}{2P^2}(AX + BY), \quad (46)$$

somit resultiert bei Einsetzen der Werte A_k und B_k sowie der Abkürzungen C_3 und S_3 nach (41) schließlich

$$\begin{aligned} J_1 = \psi_0 - 3\pi R \{ & [(\Pi_{xx}^0 - \Pi_{yy}^0) a' \\ & - 2\Pi_{yz}^0 b_3 + \Pi_{zx}^0 (a_3 - c_3) - 2\Pi_{xy}^0 b'] C_3 \\ & + [(\Pi_{xx}^0 - \Pi_{yy}^0) b' \\ & + \Pi_{yz}^0 (a_3 - c_3) + 2\Pi_{zx}^0 b_3 + 2\Pi_{xy}^0 a'] S_3 \}, \end{aligned} \tag{47}$$

wobei

$$a' = a_1 + 2b_2 - c_1 + g_1, \; b' = c_2 + 2b_1 - a_2 + g_2.$$

Für den zweiten Teil J_2 von ψ erhält man nach (43) und (9)

$$\begin{aligned} J_2 = 2 \int \int \Big\{ & \Big[-(\Pi_{zz}^0 - \Pi_{xx}^0) g_1 + \Pi_{xy}^0 g_2 - \Pi_{yz}^0 h \Big] \alpha \\ & + \Big[(\Pi_{xy}^0 - \Pi_{zz}^0) g_2 + \Pi_{zx}^0 h + \Pi_{xy}^0 g_1 \Big] \beta \Big\} \ln (r^2) \, ds \end{aligned} \tag{48}$$

und nach Ausrechnung bei Einführung der Abkürzungen C_1 und S_1 nach (41)

$$\begin{aligned} J_2 = & -4\pi R \cdot \\ & \{ [-(\Pi_{zz}^0 - \Pi_{xx}^0) g_1 + \Pi_{xy}^0 g_2 - \Pi_{yz}^0 h] C_1 \\ & + [(\Pi_{xy}^0 - \Pi_{zz}^0) g_2 + \Pi_{zx}^0 h + \Pi_{xy}^0 g_1] S_1 \}. \end{aligned} \tag{49}$$

Das Potential der durch Deformation geometrisch modifizierten räumlichen Momente

$$\psi'_0 = J_1 + J_2$$

ist hiernach zusammengesetzt aus dem Potential ψ_0 der ursprünglichen Momente, welches durch σ^0 kompensiert war, und aus zwei Zusatzgliedern von verschiedenen Symmetrien, welche bzw. durch das Auftreten von Ω und von $3\,\Omega$ unter den trigonometrischen Funktionen charakterisiert sind.

6. Schließlich sind noch die die Momente direkt beeinflussenden Umstände in Rechnung zu setzen. Diese mögen ausgedrückt werden durch die folgenden Ansätze für Zusatzmomente Π'

$$\begin{aligned} \Pi_{xx}' &= t_1 + t_{11} x_x + t_{12} y_y + \ldots + t_{16} x_y, \\ \Pi_{yy}' &= t_2 + t_{21} x_x + t_{22} y_y + \ldots + t_{26} x_y, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Pi_{xy}' &= t_6 + t_{61} x_x + t_{62} y_y + \ldots + t_{66} x_y, \end{aligned} \tag{50}$$

in denen die t_h Funktionen der Temperaturänderung allein, die t_{hk} aber Konstanten bezeichnen. Die ersteren Glieder drücken die (wahre) pyro-, die letzteren, uns in erster Linie interessierenden, die piezoelektrische Erregung aus. Der allgemeine Ansatz vereinfacht sich für Kristalle mit Symmetrien bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems, ähnlich wie der formverwandte für die elastischen Druckkomponenten. Doch besteht der Unterschied, daß im allgemeinen t_{hk} und t_{kh} voneinander verschieden sind.

Da in unserem Fall die $x_x, \ldots$ sämtlich linear homogen in x und y sind, so gilt gleiches von den in sie multiplizierten Termen. Formel (31) reduziert sich auf

$$\begin{aligned} \psi' = & -\frac{\partial^2}{\partial X^2} \int \Pi_{xx}' \ln (r^2) \, dq - \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \int \Pi_{yy}' \ln (r^2) \, dq \\ & - 2 \frac{\partial^2}{\partial X \, \partial Y} \int \Pi_{xy}' \ln (r^2) \, dq \end{aligned} \tag{51}$$

wobei nun nach (50) und (8) ist

$$\begin{aligned} \Pi_{xx}' = & t_1 + x [a_1 t_{11} + b_2 t_{12} + g_1 t_{13} + (b_3 + h) t_{14} \\ & + a_3 t_{15} + (a_2 + b_1) t_{16}] + y [b_1 t_{11} + c_2 t_{12} \\ & + g_2 t_{13} + c_3 t_{14} + (b_3 - h) t_{15} + (b_2 + c_1) t_{16}], \end{aligned} \tag{52}$$

und ähnliche Ausdrücke Π_{yy}' und Π_{xy}' darstellen. Der Bau von ψ' ist demnach ganz dem von J_1 in (44) bzw. (45) entsprechend, und die Ausführung der Rechnung führt auf ein dem dort für J_1 abgeleiteten analoges Resultat. ψ' stellt sich also dar als die Summe zweier Glieder, von denen das erste, von den t_h abhängende (pyroelektrische) linear homogen in C_2 und S_2, das zweite, von den t_{kk} abhängende (piezoelektrische) ebenso in C_3 und S_3 gebaut ist; das erste ist also durch das Auftreten von $2\,\Omega$, das zweite durch dasjenige von $3\,\Omega$ unter den trigonometrischen Funktionen charakterisiert.

7. Das Potential (ψ) der faktisch zur Geltung kommenden Wirkung ist die Summe

$$(\psi) = \psi_\sigma' + \psi_0' + \psi'$$

aus den drei Anteilen, die bzw. von der geometrisch veränderten Oberflächenladung, von den geometrisch und von den physikalisch veränderten räumlichen Momenten herrühren. Sehen wir dabei von dem Pyroanteil in ψ' ab, so ist letzteres Potential durch die Symmetrie $3\,\Omega$ charakterisiert; ψ_σ' und ψ_0' enthalten außerdem auch Ω und $5\,\Omega$. Die mit $3\,\Omega$ behafteten Glieder darin verschmelzen mit den in ψ' enthaltenen, und die beiderseitigen Parameter sind untrennbar verknüpft; auch die Benutzung beliebig verschiedener Orientierungen der Zylinderachse kann nicht zu einer Trennung führen, da die beiderseitigen Glieder, als von gleicher Natur, sich auch gleichmäßig auf andere Koordinatensysteme transformieren.

Die Ω und $5\,\Omega$ enthaltenden Glieder in ψ_σ' und ψ_0' hingegen stehen für sich allein; sie lassen sich wegen ihrer abweichenden Gesetzmäßigkeiten isoliert von den mit $3\,\Omega$ behafteten durch Beobachtung bestimmen, und da ihre

Parameter die ursprünglichen Momente H^0 enthalten, so sind auf diese Weise Schlüsse über die H^0 möglich. Allerdings nur in einem beschränkten Maße, da von den Komponenten von H^0 nur die Kombinationen $H_{yy}{}^0 - H_{zz}{}^0$, $H_{zz}{}^0 - H_{xx}{}^0$, $H_{xx}{}^0 - H_{yy}{}^0$ und $H_{yz}{}^0$, $H_{zx}{}^0$, $H_{xy}{}^0$ auftreten.

Das ideale Ziel würde offenbar sein, alle drei Hauptmomente, d. h. die drei Konstituenten des Tensortripels des Momentes H^0 nach Richtung und Größe zu bestimmen. Der auf die Richtung bezügliche Teil der Aufgabe ist dabei ganz oder zum Teil im voraus erledigt, wenn der Kristall Symmetrien besitzt, wie das bei den interessierenden Objekten stets stattfindet. Nun drücken sich die Komponenten nach einem beliebigen Achsenkreuz XYZ durch die Hauptmomente H_I, H_II, H_III, bekanntlich so aus, daß, wenn das System der Richtungskosinus durch das Schema

	X	Y	Z
H_I	α_1	β_1	γ_1
H_II	α_2	β_2	γ_2
H_III	α_3	β_3	γ_3

(53)

gegeben ist, gilt

$$\begin{aligned} H_{xx} &= H_\mathrm{I}\,\alpha_1{}^2 + H_\mathrm{II}\,\alpha_2{}^2 + H_\mathrm{III}\,\alpha_3{}^2, \\ H_{yy} &= H_\mathrm{I}\,\beta_1{}^2 + H_\mathrm{II}\,\beta_2{}^2 + H_\mathrm{III}\,\beta_3{}^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_{xy} &= H_\mathrm{I}\,\alpha_1\beta_1 + H_\mathrm{II}\,\alpha_2\beta_2 + H_\mathrm{III}\,\alpha_3\beta_3 . \end{aligned} \qquad (54)$$

Man sieht hieraus sogleich, daß, wenn für beliebig viele und beliebig orientierte Achsenkreuze XYZ die Kombinationen $H_{xx} - H_{yy}, \ldots$ und $H_{xy}, \ldots$ bekannt sind, daraus die H_I, H_II, H_III nur bis auf eine gemeinsame additive Konstante bestimmbar sind. Denn fügt man eine solche Konstante zu H_I, H_II, H_III hinzu, so ändern jene Kombinationen ihre Werte nicht.

Aber auch bei dieser Einschränkung der Ergebnisse haben dieselben doch eine Bedeutung, und Beobachtungen unter ihrer Anleitung könnten eventuell zu einer Kontrolle irgendwelcher Annahmen über die Konstitution von Kristallen dienen. In bezug hierauf mögen noch einige allgemeine Bemerkungen angeschlossen werden.

8. Unsere Formeln betreffen den Fall eines beliebig niedrig symmetrischen Kristalles und eines dagegen beliebig orientierten Zylinders, setzen auch die gleichzeitige Einwirkung biegender und drillender Drehungsmomente voraus. Die Formeln sind also von höchster Allgemeinheit und dem entsprechend kompliziert. Sie vereinfachen sich in speziellen Fällen beträchtlich, häufig aber auch so, daß gerade die für unsere Schlußfolgerungen maßgebenden Glieder mit $\mathfrak{Q}$ und $5\,\mathfrak{Q}$ in Wegfall kommen.

Solche Fälle sind also für Aufschlüsse über die Momente H_I, H_II, H_III unbrauchbar.

Reguläre Kristalle, bei denen nach Symmetrie die Hauptmomente einander gleich sind, bei denen die $H_{xx}{}^0 - H_{yy}{}^0, \ldots$ und $H_{xy}{}^0, \ldots$ also für jedes Koordinatensystem verschwinden, fallen von vornherein vollkommen aus. Ebenso sind bei niedriger symmetrischen Kristallen gelegentlich die Richtungen von Symmetrieachsen als Achsen des Kreiszylinders nicht brauchbar.

Handelt es sich z. B. um einen Kristall des rhombischen Systems, dessen Hauptachsen mit XYZ zusammenfallen, so ist

$$\begin{aligned} s_{14} = s_{24} = s_{34} = s_{64} &= 0, \\ s_{15} = s_{25} = s_{35} = s_{45} &= 0, \\ s_{16} = s_{26} = s_{36} = s_{56} &= 0, \end{aligned}$$

und

$$H_{zx}{}^0 = H_\mathrm{I}, \quad H_{yy}{}^0 = H_\mathrm{II}, \quad H_{zz}{}^0 = H_\mathrm{III}, \quad H_{yz}{}^0 = H_{zx}{}^0 = H_{xy}{}^0 = 0 .$$

Ein biegendes Moment M um die Y-Achse liefert nach (7) die Parameterwerte

$$\begin{gathered} a_1 Q\varkappa^2 = -s_{13}M, \; b_2 Q\varkappa^2 = -s_{23}M, \\ g_1 Q\varkappa^2 = -s_{33}M; \\ b_1, c_2, g_2, b_3 + h, a_3, \; b_1 + a_2, c_3, \; b_3 - h, c_1 + b_2 \end{gathered}$$

verschwinden, es ist also

$$c_1 Q\varkappa^2 = s_{23}M .$$

Analog liefert das biegende Moment L um die X-Achse

$$\begin{gathered} b_1 Q\varkappa^2 = s_{13}L, \; c_2 Q\varkappa^2 = s_{23}L, \\ g_2 Q\varkappa^2 = s_{33}L; \\ a_1 b_2, \; g_1, \; b_3 + h, \; a_3, \; b_1 + h_2, \; c_3, \; b_3 - h, \; c_1 + b_2 \end{gathered}$$

verschwinden; es ist also

$$a_2 Q\varkappa^2 = -s_{13}L .$$

Man erkennt leicht, daß bei diesen Werten in ψ_σ' und ψ_0' Terme mit $\mathfrak{Q}$ und $5\,\mathfrak{Q}$ erhalten bleiben, daß die vorausgesetzten Anordnungen also zu dem bezeichneten Zweck brauchbar sind.

Ein drillendes Moment N führt hingegen auf

$$2b_3 Q\varkappa^2 = {}^1/_2(s_{44} - s_{55})N, \; 2h Q\varkappa^2 = {}^1/_2 s_{(44} + s_{55})N,$$

während alle a_k, b_k, c_k, g_k verschwinden; damit fallen aber die von $\mathfrak{Q}$ und $5\,\mathfrak{Q}$ in ψ_σ' und ψ_0' abhängenden Glieder fort. Die bez. Anordnung ist somit unbrauchbar.

Ein allgemeiner Fall, in dem die Drillung mit Erfolg benutzbar sein würde, ist der, daß die Zylinderachse normal zu einer zweizähligen

kristallographischen Symmetrieachse liegt, ohne selbst Symmetrieachse zu sein. Legt man die X-Richtung in die Symmetrieachse, so würde hier gelten

$$s_{15} = s_{25} = s_{35} = s_{45} = 0,$$
$$s_{16} = s_{26} = s_{36} = s_{46} = 0,$$
$$\Pi_{xy}^{0} = \Pi_{xz}^{0} = 0,$$

und man kann leicht erkennen, daß bei solchen Werten die Glieder mit Ω und $5\,\Omega$ aus ψ_0' und ψ_0' nicht verschwinden. Diese Andeutungen müssen genügen.

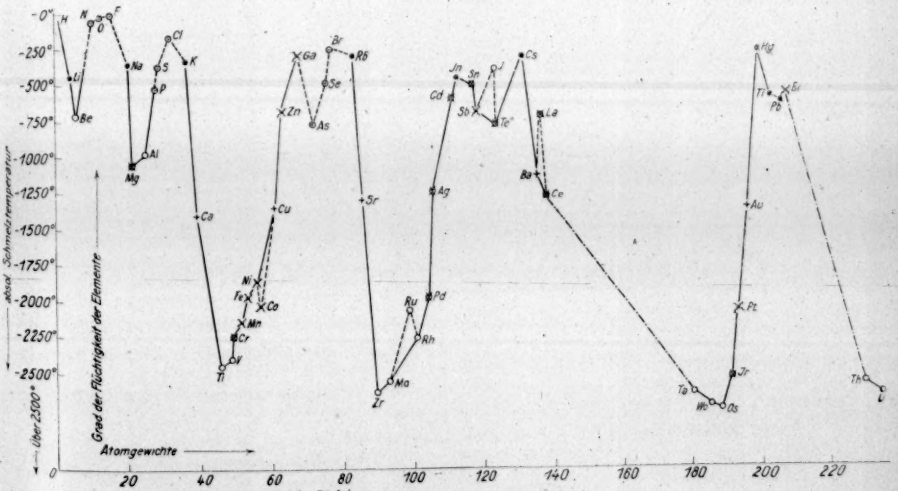
Zusammenfassend mag gesagt werden, daß nach den vorstehenden Entwicklungen Beobachtungen über die Erregung zentrisch-symmetrischer Piezoelektrizität an gebogenen und gedrillten Kreiszylindern die drei Konstituenten des permanenten räumlichen elektrischen Momentes eines Kristalles bis auf eine ihnen gemeinsame additive Konstante zu bestimmen gestatten. Damit ist die in der vorigen Arbeit aus allgemeinen Betrachtungen gezogene prinzipielle Folgerung in einem speziellen Falle realisiert. Die zentrisch-symmetrischen Erregungen verhalten sich hiernach durchaus abweichend von der früher allein in Betracht gezogenen polaren Piezoelektrizität, bei der keinerlei Beobachtungen Rückschlüsse auf die im Kristall vorhandenen permanenten räumlichen Momente gestatten.

Göttingen, Dezember 1916.

(Eingegangen 5. Januar 1917.)

Berichtigung

zur Notiz von V. Kutter, diese Zeitschrift **18**, 17, 1917. Die Figur ist durch die nachstehende zu ersetzen.



● In der Bunsenflamme leicht flüchtig } und ein gutes Spektrum liefernd.
+ „ „ „ schwerer flüchtig }
× „ „ „ kein brauchbares Spektrum liefernd, wohl aber mit dem Funken.
⊠ Nur mit dem einfachen Funken ein Spektrum liefernd.
○ Erst mit dem Flaschenfunken ein Spektrum liefernd. Hierher gehört auch *Jr*, das in der Figur fälschlicherweise mit ⊠ bezeichnet wurde.
◉ Elemente, die nicht in den Bereich unsrer Betrachtung fallen. Hierher gehört auch *J*.

BESPRECHUNGEN.

W. C. Röntgens grundlegende Abhandlungen über die X-Strahlen. Zum siebzigsten Geburtstage des Verfassers herausgegeben von der Physikalisch-Medizinischen Gesellschaft in Würzburg. gr. 8°. 43 S. mit 1 Bildnis. Würzburg, Curt Kabitzsch. 1915. M. —.70.

Es ist mit Freude zu begrüßen, daß die grundlegenden Arbeiten W. C. Röntgens über die X-Strahlen von der Würzburger Physik.-Med. Gesellschaft, in der sie Röntgen zuerst vorgetragen, zum 70. Geburtstage des Entdeckers in äußerst wohlfeiler und guter Ausstattung herausgegeben worden sind. In den drei Abhandlungen aus den Jahren 1895—1897 findet man die Geschichte der Entdeckung der X-Strahlen, die von Röntgen selbst mit bewundrungswürdiger Energie und Klarheit in fast allen ihren wesentlichen Eigenschaften schon damals erforscht worden sind.

H. Rausch von Traubenberg.

G. Scheffers, Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik, eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. 3. verbesserte Auflage. gr. 8. X u. 752 S. mit 438 Figuren. Leipzig, Veit & Co. 1916. Geh. M. 20.—, geb. M. 22.—

Der Verfasser hat sich zur Aufgabe gemacht, ein Lehrbuch zu schreiben für solche, denen die Mathematik nur Hilfswissenschaft ist; da der Verfasser nicht einmal das voraussetzt, „was der Leser eigentlich wissen müßte, sondern wirklich weiß", wird der Stoff mit epischer Breite behandelt und an zahlreichen Zahlenbeispielen diskutiert. Sehr gute Figuren tragen dabei zur Erleichterung des Verständnisses bei.

Nach Ansicht des Referenten dürfte sich das Buch, falls man es gewissenhaft durcharbeitet, dazu eignen, dem Leser ein gutes Rüstzeug für die praktische Handhabung der behandelten mathematischen Operationen zu geben. Bedauerlich ist, daß das Buch, trotz seines Umfanges, keine Differentialgleichungen bringt.

H. Rausch von Traubenberg.

W. Bahrdt, Physikalische Meßmethoden. (Sammlung Göschen Nr. 301.) 2. verbesserte Auflage. 47 S. mit 54 Figuren. Berlin u. Leipzig, G. J. Göschen. 1915. Geb. M. 1.—

Dieser kleine billige Leitfaden der praktischen Physik kann bei Schülerübungen, aber auch im physikalischen Anfängerpraktikum beim Hochschulunterricht besonders den Studierenden der Naturwissenschaften und Medizin empfohlen werden.

H. Rausch von Traubenberg.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Eidgen. Technischen Hochschule in Zürich Dr.-Ing. Emil Wirz für elektrische Meßtechnik, an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Friedrich L. Hahn für Chemie.

Berufen: Der ord. Professor an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Johannes Stark zum ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Greifswald.

Gestorben: Der Abteilungsvorstand für Wettertelegraphie, Küstenmeteorologie und Sturmwarnungswesen der Deutschen Seewarte in Hamburg Professor Dr. Louis Großmann, der ord. Professor für Chemie an der Technischen Hochschule Lemberg Dr. Bronislaus Pawlewski.

Bemerkungen für die Herren Mitarbeiter!

1. Die **Briefbezeichnung der Schriftleitung** ist Göttingen, Nikolausberger Weg 20.

2. Die Physikalische Zeitschrift will vor allem einer rasch aufklärenden und anregenden Berichterstattung dienen. Die Mitteilungen müssen daher **auf das Wesentliche beschränkt** und **in möglichst knapper Form** abgefaßt sein. Sie sollen im allgemeinen den Umfang von etwa 8 Spalten nicht überschreiten.

3. Die **Abhandlungen** müssen druckfertig eingeliefert werden. Im Interesse rascher Erledigung liegt es, sie auf **einseitig** und deutlich, am besten mit **Schreibmaschine** geschriebenen Blättern einzuliefern.

4. **Zitate** bitten wir in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form zu geben; auch bitten wir, die vom Ausschuß für Einheiten und Formelzeichen (AEF) vorgeschlagenen Bezeichnungen zu berücksichtigen.

Herausgeber, Schriftleitung und Verlag der Physikalischen Zeitschrift.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.